2020 年高考江苏卷第 12 题的七种解法

莆田第二中学 **蔡海涛 卢妮**

摘要：本文以一道 2020 年高考题为例，通过多种解题方法的分析，探究多元变量最值问题的求解策略.

关键词:2020 高考题 多元变量

题目：（2020 年高考江苏卷 12）已知 $5x^2y^2+y^4=1(x,y\in\mathbf{R})$，则 x^2+y^2 的最小值是________.

解法 1： 因为 $5x^2y^2+y^4=1$，所以 $x^2=\dfrac{1-y^4}{5y^2}$

则 $x^2+y^2=\dfrac{1-y^4}{5y^2}+y^2=\dfrac{1}{5y^2}+\dfrac{4y^2}{5}\geqslant2\sqrt{\dfrac{1}{5y^2}\cdot\dfrac{4y^2}{5}}=\dfrac{4}{5}$，

当且仅当 $\dfrac{1}{5y^2}=\dfrac{4y^2}{5}$，即 $x^2=\dfrac{3}{10},y^2=\dfrac{1}{2}$ 时取等号. 所以 x^2+y^2 的最小值为 $\dfrac{4}{5}$.

点评：利用消元转换消去 x，把 x^2+y^2 化为只含有 y 一个变量的式子，再利用基本不等式求得求值. 多元变量求最值问题利用消元转化是常规套路，利用基本不等式要注意“一定、二正、三等号”.

解法 2： 设 $x^2=a$，$y^2=b$，$(a,b\geqslant0)$，问题可转化为：已知 $5ab+b^2=1$，求 $a+b$ 的最小值. 则由 $5ab+b^2=1$，得 $a=\dfrac{1-b^2}{5b}$，所以 $a+b=\dfrac{1}{5b}+\dfrac{4b}{5}\geqslant2\sqrt{\dfrac{4}{25}}=\dfrac{4}{5}$.

解法 3 同解法 2 把问题转化为求 $a+b$ 的最小值.

则 $1=5ab+b^2=b(5a+b)=\dfrac{1}{4}\cdot4b(5a+b)\leqslant\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(5a+5b)^2}{4}$ 解得 $(a+b)^2\geqslant\dfrac{16}{25}$，

解得 $a+b\geqslant\dfrac{4}{5}$.

点评:解法 2 基本思路同解法 1，均是先利用消元转化再利用基本不等式求得最值，区别之处是发现已知和要求的式子次数较高，先利用换元进行降幂，使得运算简化. 解法 3 关键是注意到 $5ab+b^2$ 为定值，故进行配凑再利用基本不等式得到一个不等关系，从而求得 $a+b$ 的范围.

解法 4： 令 $a+b=t$，则 $a=t-b$ 代入 $5ab+b^2=1$，得关于 b 的方程 $4b^2-5tb+1=0$，

因该方程有解. 所以$\Delta=25t^2-16\geqslant 0$, 解得$t\geqslant\dfrac{4}{5}$.

点评：首先把$a+b$看做一个整体t，再得到关于b的一元二次方程，利用判别式求得范围.

解法 5：$(a+b)^2=(a+b)^2-\lambda\left(5ab+b^2-1\right)=a^2+(2-5\lambda)ab+(1-\lambda)b^2+\lambda$,

由$\Delta=(2-5\lambda)^2-4(1-\lambda)=0$, 得$\lambda=\dfrac{16}{25}$. 所以$(a+b)^2=\left(a-\dfrac{3}{5}b\right)^2+\dfrac{16}{25}\geqslant\dfrac{16}{25}$,

故$a+b\geqslant\dfrac{4}{5}$.

点评：考虑将式子$a^2+(2-5\lambda)ab+(1-\lambda)b^2$配成一个完全平方式，故令$\Delta=(2-5\lambda)^2-4(1-\lambda)=0$，求得$\lambda$的值，进而得到$(a+b)^2$的不等关系，求得范围.

解法 6：同解法 2，$5ab+b^2=1$，则$(5a+1)b=1\left(a,b\geqslant 0\right)$

令$b=\tan\theta\left(\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$，则$a=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{\tan\theta}-\tan\theta\right)$

所以$a+b=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{\tan\theta}-\tan\theta\right)+\tan\theta=\dfrac{1}{5\tan\theta}+\dfrac{4}{5}\tan\theta\geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}}=\dfrac{4}{5}$.

点评：双变量具有定值关系，常利用三角代换，进而转化为求三角最值问题. 一般地，若$a^2+b^2=1$，则令$\begin{cases}a=\sin\alpha,\\ b=\cos\alpha\end{cases}$；若$ab=1$，则令$\begin{cases}a=\tan\alpha,\\ b=\cot\alpha\end{cases}$.

解法 7：同解法 2，$a=\dfrac{1-b^2}{5b}\left(a\geqslant 0,b>0\right)$, 则函数$a=f(b)$的图象如图 1 所示, 令$z=a+b$，则$a=-b+z$，当直线$a=-b+z$与曲线$a=f(b)$相切时，$z=a+b$取得最小值. 因为$f'(b)=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{b}-b\right)$, 令$\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{b}-b\right)=-1$, 解得$b=\dfrac{1}{2}$, 代入$a=\dfrac{1-b^2}{5b}$, 解得$a=\dfrac{3}{10}$, 此时$(a+b)_{\min}=\dfrac{4}{5}$.

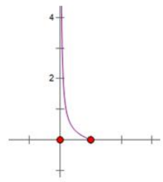

图 1

点评：双变量问题常常可以通过确定主元, 看成一个函数关系来进行处理.

多元变量最值问题在近年各地高考中频频出现，其特殊的解析式结构决定其具有知识覆盖面广、综合性强、解题方法灵活多样的特点[1]. 通过以上高考题的多解分析, 可总结方法一般是从数和形两个角度着手进行研究. 从数的角度出发，常常是利用函数方程思想，进行消元转化，结合换元简化，再利用基本不等式求得范围；从形的角度出发, 常常是发现多元变量之间的关系，具有怎样的几何意义，再利用几何特征判断取得最值的位置，最后求得范围.

参考文献:

［1］蔡海涛．由多元变量探究最值问题［J］．中学数学教学参考，2018(1-2):104-105．