从“学会”走向“会学”

——微课“与圆的切线有关的证明”的实录与反思

郑为勤　　　蔡海涛

福建省大田县第六中学　　福建省莆田第二中学

摘　要：微课是落实“停课不停学”的一个有效方法.笔者以一节“与圆的切线有关的证明”微课为例阐述微课设计流程，及如何促使学生主动学习，从“学会”走向“会学”的教学策略.

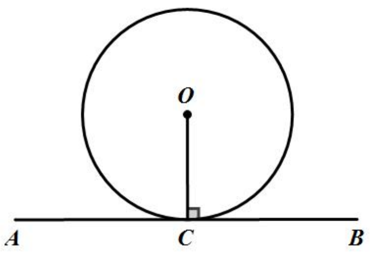
关键词：复习；微课；反思

1.引言

2020年春，各地积极响应“停课不停教、停课不停学”备战疫情.笔者参与了福州数学会空中课堂“九年级中考复习核心知识点板块”微课教学，课题为《与圆的切线有关的证明》.这节课涉及知识是中考重点考查内容，笔者对微课设计进行深入思考：学生要学会哪些知识、掌握哪些方法、领悟哪些思想，微课的微在哪，聚焦在哪，如何通过一题多解、多变，让学生建构知识体系，从而由“学会”走向“会学”.下面是笔者这节微课的实录与反思.

2.微课流程

2.1 知识回顾

	圆的切线定义	切线的性质定理	切线的判定定理	切线长定理
文字语言	直线和圆有唯一公共点时，叫做直线与圆相切.这时直线叫做圆的切线，唯一的公共点叫做切点.			
图形语言				
符号语言				$\because$ PA、PB 是 $\odot O$ 的切线，切点为 A、B. $\therefore PA = PB$，PO 平分 $\angle APB$.

教师分别对这四个知识点说出其中一种语言，提示学生听讲解时先按下暂停键，思考下再说出其他两种语言.

设计意图：从文字语言、图形语言、符号语言三个方面复习本节课涉及的知识点，检验学生在三种语言之间是否能灵活转化.教师努力营造一对一的教学氛围，充分调动学生的积极性和主动性.

2.2 范例精析

2.2.1 根据切线证线、角关系

例 1

（1）如图 1-1，在$\triangle ABC$中，AC是$\odot O$的直径，$\odot O$与BC相切于点C，且$AB=10$，$BC=8$，那么$\odot O$的半径是___.

（2）如图 1-2，在$\triangle ABC$中，圆心O在AC上，$\odot O$与AB、BC分别切点C、D，且$AB=10$，$BC=8$，那么$\odot O$的半径是___.

（3）如图 1-3，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^{\circ}$，$\odot O$与AB、BC、AC边分别切于点D、E、F，且$AB=10$，$BC=8$，那么$\odot O$的半径是___.

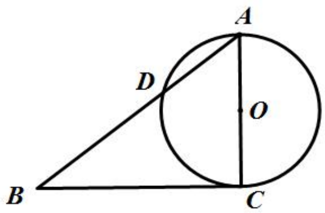


图 1-1

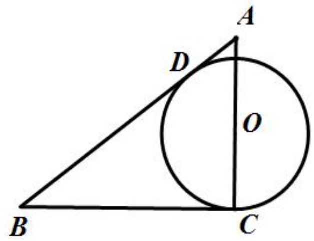


图 1-2

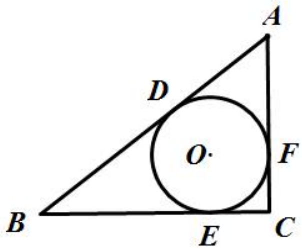


图 1-3

师：第（1）题切线性质定理的直接运用；

第（2）小题：

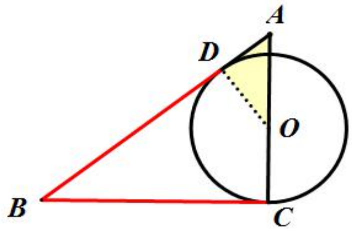


图 1-2-1

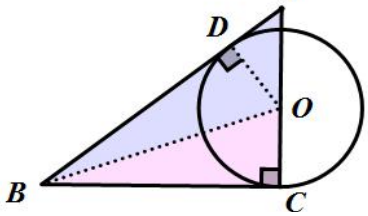


图 1-2-2

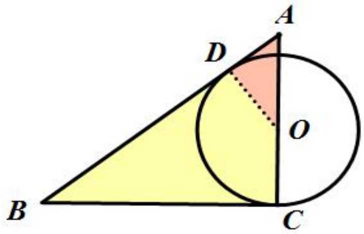


图 1-2-3

解法一：如图 1-2-1，运用勾股定理，$Rt\triangle AOD$中：$AD^2+OD^2=AO^2$，得方程$2^2+r^2=(6-r)^2$；

解法二：如图 1-2-2，运用等积法，由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOB}$，即 $\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot OC+\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OD$ 得方程 $8\times 6=8\cdot r+10\cdot r$；

解法三：如图 1-2-3，由相似三角形得比例式 $\frac{AD}{AC}=\frac{DO}{BC}$，得 $\frac{2}{r}=\frac{6}{8}$；

解法四：如图 1-2-3，运用锐角三角函数 $Rt\triangle AOD$ 中：$\tan A=\frac{OD}{AD}$，$Rt\triangle ABC$ 中 $\tan A=\frac{BC}{AC}$，因此 $\frac{OD}{AD}=\frac{BC}{AC}$，得方程 $\frac{r}{2}=\frac{8}{6}$.

第（3）小题请学生思考如何解决这个问题？有几种不同的方法？并尝试对这道题进行变式.

设计意图: 首先第（1）小题定理的直接运用，让学生熟悉定理；然后第（2）小题设计一题多解分析，并进行归纳:由已知切线，连接圆心切点，根据切线的性质定理得直角三角形，可以运用直角三角形有关知识进行解题、证明，让学生灵活运用知识；进而第（3）小题由学生自主完成，尝试变式.整个题组的设计由浅到深，充分调动学生学习的激情.

2.2.2 证明直线与圆相切

例 2 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，过点 C 作 $\angle BCD=\angle ACB$ 交 $\odot O$ 于点 D，连接 AD 交 BC 于点 E，延长 DC 至点 F，使 $CF=AC$，连接 AF.

求证：AF 是 $\odot O$ 的切线.

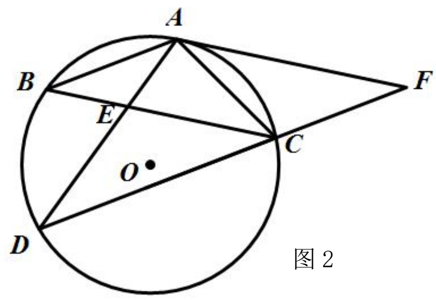
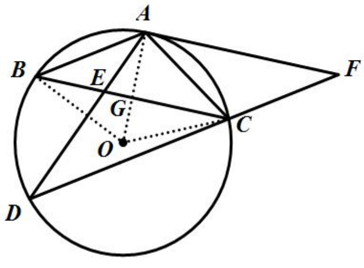
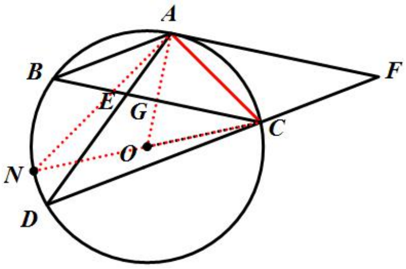
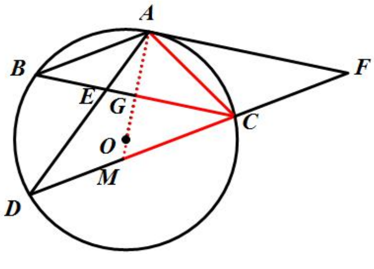


图 2

师分析: 从求证出发，要证 AF 是 $\odot O$ 的切线，结合已知条件利用圆的切线判定定理来证明.连接 AO 交 BC 于点 G，只需证 $\angle OAF=90^{\circ}$，转化为需证 $\angle OAC+\angle CAF=90^{\circ}$.由 $AB=AC$ 可得 $\angle ABC=\angle ACB$，结合已知 $\angle BCD=\angle ACB$，得 $\angle BCD=\angle ABC$，所以 $AB/\!/CD$，即 $AB/\!/CF$，结合已知条件易证四边形 $ABCF$ 为平行四边形，则 $AF/\!/BC$，$\angle CAF=\angle F$.故 $\angle ABC$、$\angle ACB$、$\angle BCD$、$\angle CAF$、$\angle F$ 这五个角都相等.观察图形，只需证 $\triangle AOG$ 是直角三角形即可.结合 $AB=AC$ 得点 A 在线段 BC 的垂直平分线上，又点 O 也在线段 BC 的垂直平分线上，即 AO 垂直平分 BC，$\triangle AOG$ 是直角三角形.从而本题得证.







本题还有以下解法：

解法二：如图 2-1，连接 AO 、 BO 、 CO . 由 $AB=AC$ 得 $\angle AOB=\angle AOC$ ，通过等腰三角形三线合一的性质证明 $AO\perp BC$.

解法三：如图 2-2，连接 AO ，连接 CO 并延长交 $\odot O$ 于点 N ，连接 AN . 由直径所对的圆周角是直角，得 $\angle CAN=90^{\circ}$.

解法四：如图 2-3，连接 AO 并延长，交 BC 于点 G ，交 CD 于点 M ，证明 $\triangle ACG\cong\triangle MCG$ ，从而 $\angle AGC$ 和 $\angle MGC$ 相等且和为平角，得 $AO\perp BC$ 于点 G .

设计意图：通过教师思路的深入分析，有利于学生掌握初中几何证明最基本的方法. 要证明切线，运用定理法是“连半径，证垂直”；同时通过这道例题一题多解的思路点评，总结证明垂直的方法. 方法有：（1）利用垂直平分线判定定理证垂直；（2）利用全等三角形证垂直；(3)利用等腰三角形三线合一证垂直；（4）利用直径所对的圆周角是直角证垂直.

例 3（2017 年福建省中考 21 题(2)）如图 3，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 P 在 CA 的延长线上， $\angle CAD=45^{\circ}$. 若 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}$， $AD=AP$.

求证： PD 是 $\odot O$ 的切线.

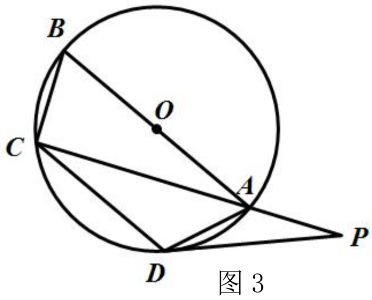


图 3

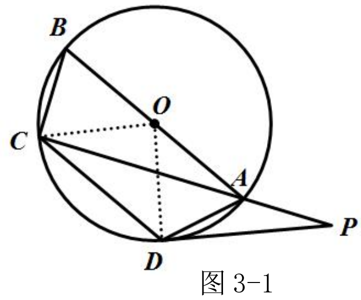


图 3-1

师分析：如图 3-1，连接 CO 、 DO ，由已知 $\angle CAD=45^{\circ}$ 、 $AD=AP$ ，根据等边对等角及三角形外角等于不相邻的两个内角和，可得 $\angle ADP$ 的度数；根据圆周角定理及推论及由已知 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}$ ，可得 $\angle COD$ 的度数及 $\angle BOC=\angle AOD$ ；由 $\angle BOC+\angle COD+\angle AOD=180^{\circ}$ ，从而得 $\angle AOD$ 的度数；等腰 $\triangle AOD$ 中，已知顶角求得底角 $\angle ODA$ 的大小；通过计算得 $\angle ODA+\angle ADP=90^{\circ}$.

设计意图:利用计算来证明垂直，即由定量条件来证明定性结论是学生比较少接触的方法，本题的分析能为学生证明垂直带来一些新的启发.

2.2.3 与圆的切线有关的综合应用

例 4：如图 4，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，以AB为直径的$\odot O$分别交AC、BC于点D、E，点F在AC的延长线上，且$\angle CBF=\dfrac{1}{2}\angle CAB$

（1）求证：直线BF是$\odot O$的切线；

（2）若$AB=5$，$\sin\angle CBF=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，求$BF$的长.

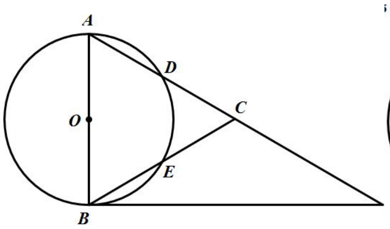


图 4

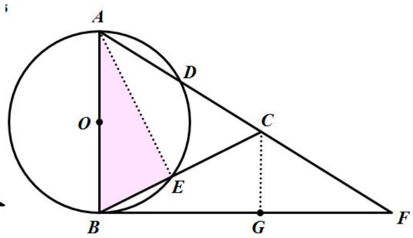


图 4-1

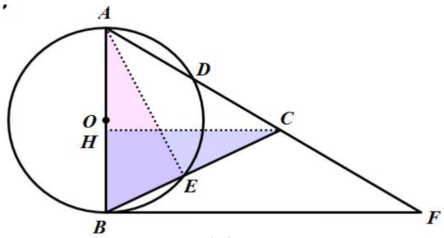


图 4-2

师分析：第（1）小题，如图 4-1，连接AE，$AB=AC$，AB为直径可以得$\angle BAE=\dfrac{1}{2}\angle CAB$，已知$\angle CBF=\dfrac{1}{2}\angle CAB$，得$\angle CBF=\angle BAE$，可证得$\angle ABE$、$\angle CBF$互余，（1）问得证. 另法可设$\angle CBF=\theta$，由$\angle CBF=\dfrac{1}{2}\angle CAB$，得$\angle CAB=2\theta$，那么可以用$\theta$的代数式表示$\angle ABE$，亦可证得$\angle ABE$、$\angle CBF$互余；

第(2)小题，如图 4-1，连接AE，由$AB=5$，$\sin\angle CBF=\sin\angle BAE=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$Rt\triangle ABE$可解，求得$BE$可求$BC$. 过点$C$作$CG\perp BF$于点$G$，$Rt\triangle BCG$也可解，求得$CG$的长，利用相似得比例式，可求$BF$的长；或者如图 4-2，过点$C$作$CH\perp AB$于点$H$，$Rt\triangle BCH$可解，求得$CH$的长，利用相似求得$BF$的长.

设计意图：本道例题是圆的切线性质与判定的综合应用，对前两部分的学习是总结，也是拓展. 展示与圆的切线的有关证明与解直角三角形之间的联系. 通过辅助线构造直角三角形，运用解直角三角形的知识，求解图形中相关的边、角元素.

2.3 总结提升及进阶练习：

由易到难布置A，B，C三份练习（因篇幅此处从略），学生根据自己的学习程度选择其中一份练习，并请根据自己的学习心得，绘制一份思维导图.

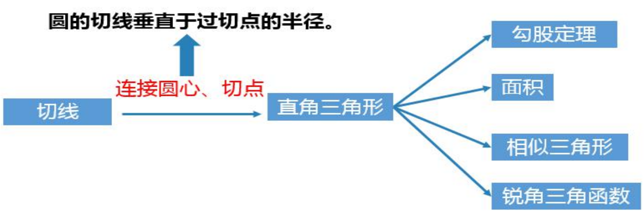
设计意图：微课是一个完整的教学设计，除视频外，还有任务单、课件、进阶练习等其他各种教学资源，可满足不同学生的个性化需求. 通过绘制一份思维导图的作业，促使学生注意收集、整理、反思，助推学生思考的热情，获得比微课视频学习更多的知识与经验.

3. 设计反思

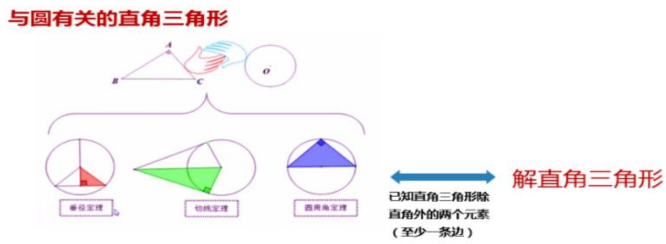
3.1. 注重知识的整理和整合，建立不同知识内容之间的联系

一节优质的微课，讲解的知识内容是核心部分. 在复习课中，整理知识结构，是不可缺失的一环. 微课设计中，如果只是对所涉及的知识点作一个简单的罗列，没有整合，就形成不了知识体系，各块之间还是零散的，更谈不上形成充满活力的数学网络.

如圆的切线与直角三角形之间的联系. 已知切线，根据性质即已知直角，可以运用直角三角形的勾股定理、等积法、相似三角形、三角函数等不同的知识处理. 要运用切线判定定理，就要考虑如何得直角，从平行、全等、垂径定理、直径所对的圆周角等不同的判定直角. 与圆的切线有关计算，就要联系解直角三角形的知识. 这样，各个知识板块之间互相联系，形成如下的知识结构图.



第一部分知识结构图



第二部分知识结构图

做好知识之间的联系，建构一个知识板块的网络，学生在解题时思维就更发散、思路就更敏捷，更富有灵感了.

3.2. 发挥教师引导示范作用，注重解题方法的归纳和提炼

在线下课堂中，学生是教学过程的“演员”，教师设计问题，引导学生回答，教师根据学生回答的情况进行教学. 微课复习时，学生是“观众”，教师与学生难以互动，启发性的问题也由教师自问自答. 此时，教师不能只把解题思路或解题步骤直接告诉学生，而是通过“我的想法是”“我是这么想的”向学生展示自己对问题获得解决的过程：思路是如何获得的、有什么经验、经历了怎样的曲折. 这样真诚的分享自己的所思所想所获，会潜移默化为学生的解题经验，能发挥示范作用. 比如在例 2 中，教师分享自己对这道例题如何运用综合分析法获得解题思路. 虽然学生是“观众”，但学生的注意力、思维随着教师的分享经历了数学知识发展、问题解决的关键，也成为“参与者”.

学生的自主学习通常是就题解题，缺乏提炼. 微课设计要体现对解题方法的归纳. 引导学生进行学习线索的梳理、方法的优化、思想的提炼，将外在的学习内容转化为内在的精神力量[1]. 这些学习策略的传授比教给学生知识，更具有意义和价值.

如在例 2 教师示范对 $AB=AC$ 这一已知条件的运用，这样讲解：如图 2-1，连接 AO、

BO、CO，已知 $AB = AC$，这一符号语言可以转化为“点 A 到线段 BC 两端点距离相等”.那么 $BO = CO$，也转化为“点 O 到线段 BC 两端点距离相等”，由此得 AO 是线段 BC 的垂直平分线，得 $AO \perp BC$；已知 $AB = AC$，这一符号语言还可以转化为“$\triangle ABC$ 中的两条相等的腰”，通过等腰三角形三线合一的性质证明 $AO \perp BC$．$AB = AC$ 还可以是“$\odot O$ 中两条相等的弦”，由圆心角定理、垂径定理的推论得 $AO \perp BC$.同一符号语言转化为三种不同的方字语言，从而得到不同的解题思路.借助这样的引导示范，帮助学生掌握方法策略，提高了微课学习的效率.

3.3 注重学生参与,让学习行为真正发生

微课教学的组织较松散，且存在时间与空间的不同步，教师的教学方式成为维持教师与学生关系的关键.要吸引学生参与，让学习行为真正发生，微课录制时，要注意语言规范，语音清晰，要有对话交流的意识.虽然不是线下课堂，微课教学中仍渗透启发式教学，在题意分析、问题转化的讲解中，运用一系列元认知提示语来引导、助推学生的思维活动.虽然看不到学生的表现，但也应该适时穿插鼓励性语言.利用多媒体设置互动、学生的动手活动.另外观看微课的学生程度参差不齐，要做到低起点、入口宽，关注差异性，因材施教.

本节微课的第一个例题的第（1）小题，是圆的切线定理的直接运用，只有简单的两个推理.第（2）小题，讲解了四种解法.注意展示一题多解，既是对知识纵横联系的剖析，同时也是让对不同想法的学生与微课主讲教师产生共鸣.第（3）小题请学生思考如何解决这个问题？有几种不同的方法？是对第（2）小题介绍的方法进行一个及时的巩固，让学生学以致用，同时对程度较好的学生提出“尝试对这道题进行变式”，兼顾了不同层次学生的需求.建构主义学习理论强调：学生之间学习经验是不同的，具有一定的差异性[2].微课设计就要依据学生不同的学情，从学生的实际出发.积极尝试选择性学习、个性学习.数学中的变式教学、一题多解都是直接运用该理论的一个个生动的例子.

4.结语

复习微课，不论是设计或实施，与常态复习课有共性，也有微课之特性.彰显知识的结构，方法归纳提炼，是其功能之一，也是其教学价值之一.复习微课的设计与教学，应遵循“教与学对应”和“教与数学对应”的双重原理 ，把握学习规律、结合学科性质[3].在微课教学中，应该呈现一个什么样的知识结构，如何引导，如何调动学生学习的积极性，值得我们思考与实践，才能助力学生发展数学素养、助力学生真正做到从“学会”走向“会学”.

参考文献：

[1] 钟鸣，蒋育芳.挖掘障碍成因，建构深度思维[J].中学数学教学参考（中旬），2018（7）：54-56.

[2] 郦兴江.数学思维异构让深度教学真正发生[J].中学数学教学参考（中旬），2020（3）：5-9.

[3] 陆珺.数学微课之设计深思与教学审视[J].中学数学教学参考（中旬），2015（7）：32-35.