一道2019年高考题的多视角剖析

莆田第二中学　　蔡海涛

本文系福建省教育科学“十三五”规划课题《深度融合信息技术落实高中数学核心素养的实践研究》（课题编号：FJJKXB18-379）研究成果之一.

摘要：2019年全国Ⅲ卷一道三角函数题，构思精妙.本文从函数方程、数形结合等思想方法剖析其解法，还从素养视角进行剖析其命题导向.

关键词:函数方程　数形结合　素养导向　剖析

2019年的高考已落下帷幕，一道道赏心悦目的数学高考题让人回味无穷.2019年高考全国Ⅲ卷理科第18题是一道以三角函数为背景的试题，主要考查正余弦定理、三角恒等变换、三角形面积公式等基础知识，考查推理论证能力与运算求解能力，考查化归与转化思想、函数与方程思想，考查逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性.尤其是试题中的第(2)问，看似平淡无奇，实则构思精妙，入口较宽，体现了在解决问题过程中整体把握三角形的知识和三角公式运用的能力，值得细细品味.

试题呈现　(2019年高考全国Ⅲ卷·理18) $\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，已知$a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$.

(1)求B；(2)若$\triangle ABC$为锐角三角形，且$c=1$，求$\triangle ABC$面积的取值范围.

第(1)问的结论是$B=60^\circ$；第(2)问的结论是$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.下面从多个视角对第（2）问进行剖析.

1　函数方程的视角

解法1　由题设及（1）知$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$．由正弦定理得

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sin\left(120^\circ-C\right)}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}.$$

由于$\triangle ABC$为锐角三角形，故$0^\circ<A<90^\circ,0^\circ<C<90^\circ$，由（1）知$A+C=120^\circ$，

所以$30^\circ<C<90^\circ$，故$\tan C>\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{2}<a<2$，从而$\dfrac{\sqrt{3}}{8}<S_{\triangle ABC}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因此，$\triangle ABC$面积的取值范围是$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

解法2 由余弦定理得，$b=\sqrt{a^2+1-2a\cdot\cos 60^\circ}=\sqrt{a^2-a+1}$，

由于$\triangle ABC$为锐角三角形，可得$\cos A=\dfrac{b^2+1-a^2}{2b}>0$，且$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-1}{2ab}>0$，

即 $a^2-a+1+1>a^2$ 且 $a^2+a^2-a+1>1$，解得 $\frac{1}{2}<a<2$，下同解法1.

评注 上述两种解法均立足于“函数与方程思想”的应用.“函数与方程思想”的一个重要应用就是用运动变化的观点，构造函数，运用函数的性质去分析问题、解决问题.[1]两种解法均把面积构造为以 a 为自变量的函数，区别之处是解法1是从角入手，把 a 用 $\tan C$ 来表示，通过内角和定理缩小角 C 的范围，从而得到 a 的范围；解法2是从边入手，先利用余弦定理把 b 用 a 表示，又利用锐角三角形中两边平方和大于第三边平方的结论求得 a 的范围.

2 数形结合的视角

解法3 如图1，$\triangle ABC$ 中， 动点 C 在异于点 B 的射线 BM 上运动，且 $\angle MBA=60^\circ$，过 A 作 $AC_1\perp AB$，交 BM 于 C_1，过 A 作 $AC_2\perp BM$，交 BM 于 C_2. 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以点 C 在异于 C_1、C_2 的线段 C_1C_2 上运动.

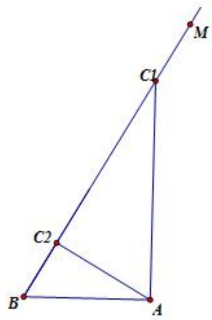

图1

当 $AC_1\perp AB$ 时， $AC_1=AB\tan 60^\circ=\sqrt{3}$， $S_{\triangle ABC_1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

当 $AC_2\perp BM$ 时， $AC_2=AB\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$， $S_{\triangle ABC_2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

显然，当点 C 从 C_2 运动到 C_1 时， $\triangle ABC$ 面积越来越大.

故 $\triangle ABC$ 面积的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

解法4 以 B 为原点，直线 BA 为 x 轴，过 B 点且与 BA 垂直的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系. 则 $B(0,0),A(1,0)$，因为 $B=60^\circ$，所以点 C 在异于原点的射线 $y=\sqrt{3}x(x>0)$ 上运动. 以 BA 为直径的圆的方程为 $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$，它与 $y=\sqrt{3}x(x>0)$ 的交点为 $D(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$. 过 A 且与 x 轴垂直的直线方程为 $x=1$，它与 $y=\sqrt{3}x(x>0)$ 的交点为 $E(1,\sqrt{3})$. 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以点 C 在异于 D、E 的线段 DE 上运动. 下同解法3.

评注 上述两种解法均立足于“数形结合思想”的应用，解题策略就是把已知条件中的

数量关系转化为图形的性质，先借助形的几何直观性来阐述数之间的某种关系，然后借助于数的精确性来阐述形的某些属性. 两种解法均以探求点C的轨迹为切入点，在运动变化中寻求最值的位置，然后再加以计算. 区别之处是探求点C的轨迹方法不同，解法1是用平面几何的方法，解法2是用解析几何的方法.

3 素养导向的视角

当前高考正在实现从能力立意到素养导向的转变.[2]

从以上两个视角四种解法的分析,可以归纳解决问题的流程为:审视数学问题(求三角形ABC面积的取值范围)→选择解决问题的方法(从数的角度或是从形的角度入手来表示面积)→运用数学知识解决问题(如何求目标函数的最值或是如何通过图形发现最值时的位置). 上述的求解思路表明，基于素养立意的试题，考查方向通常有：一是考查考生会不会想到运用哪些知识与方法解决问题;二是考查考生能不能熟练且准确地运用数学知识与方法解决相应的问题.[3]

数学家哈尔莫斯说过：“数学的真正组成部分是问题和求解.研究数学，基本上都是在努力提出数学问题和解决数学问题.”“函数与方程思想”及“数形结合思想”是高考重点考查的两大思想方法.对“函数与方程思想”的考查，在全国卷中，经常以三角函数为载体，考查求值、最值与取值范围问题，求解策略一般为构造出待求最值关于某个变量的函数或构造出关于待求值的方程.对学生“数形结合思想”的考查，大致可分为“以形助数”和“以数助形”两种情形.2019年高考全国Ⅲ卷理科18题，没有出现任何图形，考查学生如何根据动点C的运动，对图形展开想象，由“数”中去构造出“形”.基于画图、用图和对图形的想象而命制试题，是素养立意的重要体现方式.

基于高考改革带来的变化，教师在平时的解题教学中也要与时俱进，努力寻求合理的教学策略，需要更新理念：领悟思想比做题重要，深度思考比答题方法重要，培养能力比分数重要，提高学科素养比考试重要.[4]

参考文献:

[1]林新建.思想立意,将数学解题臻于完美[M].长春:吉林大学出版社，2016.

[2]任子朝.从能力立意到素养导向[J].中学数学教学参考，2018(5):1.

[3]柯跃海.选拔性数学考试的命题与评价[M].西安:陕西师范大学出版总社，2018.

[4]林运来.数学教学高手的秘密[M].上海:华东师范大学出版社，2018.