2019年全国Ⅰ卷理科第10题的探究

莆田第二中学　　蔡海涛

本文系福建省教育科学“十三五”规划课题《深度融合信息技术落实高中数学核心素养的实践研究》（课题编号：FJJKXB18-379）.

1 试题呈现

(2019年高考全国Ⅰ卷·理10)已知椭圆C的焦点为$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过F_2的直线与C交于A，B两点．若$|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则C的方程为(　　)

A.$\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　B.$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$　　C.$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　D.$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

本题考查椭圆的定义、标准方程及其简单性质，考查运算求解能力、推理论证能力，考查数形结合思想、函数与方程思想、化归与转化思想，考查直观想象、数学运算等核心素养.

2 解法赏析

解法1 如图1，因为$|AF_2|=2|F_2B|$，所以$|AB|=3|BF_2|$，又$|AB|=|BF_1|$，

所以$|BF_1|=3|BF_2|$，又$|BF_1|+|BF_2|=2a$，所以$|BF_2|=\frac{a}{2}$，

$|BF_1|=\frac{3}{2}a$，$|AF_2|=|AF_1|=a$，A为椭圆短轴端点.

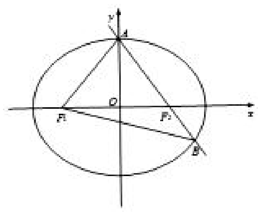

图1

在$RT\triangle AF_2O$中，$\cos\angle AF_2O=\frac{1}{a}$，

在$\triangle BF_1F_2$中，由余弦定理可得$\cos\angle BF_2F_1=\frac{4+(\frac{a}{2})^2-(\frac{3}{2}a)^2}{2\times2\times\frac{a}{2}}$，

由$\cos\angle AF_2O+\cos\angle BF_2F_1=0$，可得$\frac{1}{a}+\frac{4-2a^2}{2a}=0$，解得$a^2=3$，$b^2=a^2-c^2=3-1=2$．

所以椭圆C的方程为：$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$．故选$B$．

解法2　同解法1，$|BF_2|=\frac{a}{2}$，$|BF_1|=\frac{3}{2}a$，$|AF_2|=|AF_1|=a$，

在$\triangle AF_1B$中，由余弦定理可得$\cos\angle F_1AB=\frac{a^2+\frac{9a^2}{4}-\frac{9a^2}{4}}{2\cdot a\cdot\frac{3a}{2}}=\frac{1}{3}$.

在$\triangle AF_1F_2$中，由余弦定理得$a^2+a^2-2\cdot a\cdot a\cdot\frac{1}{3}=4$，解得$a=\sqrt{3}$．下同解法1.

评注　以上两种解法均由椭圆的定义入手，把$|AF_1|$、$|AF_2|$、$|BF_1|$、$|BF_2|$用a表示，且发现A为椭圆短轴端点.然后抓住两个焦点三角形（椭圆或双曲线上任一点与其两个焦点所构成三角形称为椭圆或双曲线的焦点三角形）$\triangle AF_1F_2$、$\triangle BF_1F_2$之间的关系（法1），或是抓住$\triangle AF_1B$、$\triangle AF_1F_2$之间的关系（法2），寻找关于基本量间的等量关系，建立关于基本量的方程，求得a的值，进而求得椭圆的方程.一般地，涉及焦点三角形的计算常常利用定义入手，两个焦点三角形的问题往往要发现这两个三角形边、角的关系.

解法3　同解法1，得$|BF_2|=\dfrac{a}{2}$，$|BF_1|=\dfrac{3}{2}a$，$|AF_2|=|AF_1|=a$，A为椭圆短轴端点. 不妨设$A(0,b)$. 由$|AF_2|=2|BF_2|$可得$\overrightarrow{AF_2}=2\overrightarrow{F_2B}$，得$B$的坐标为$\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{b}{2}\right)$. 因为点$B$在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上，所以$\dfrac{9}{4a^2}+\dfrac{1}{4}=1$，解得$a^2=3$. 下同解法1.

解法4　同解法3可设$A(0,b)$. 过B作$BC\perp x$轴于C，则$\dfrac{|OA|}{|BC|}=\dfrac{|OF_2|}{|F_2C|}=\dfrac{|AF_2|}{|F_2B|}=2$，得$B$的坐标为$\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{b}{2}\right)$. 下同解法3.

评注　解法3和解法4均考虑先求出点B的坐标，然后代入椭圆的标准方程求得a的值. 两种解法的区别在于求得点B的坐标方法不同，解法3利用向量方法，解法4利用平几方法. 在解析几何的运算中，要注意平面向量的工具功能.

解法5　同解法1，得A为椭圆短轴端点. 点A到右准线$x=\dfrac{a^2}{c}$的距离$d_1=\dfrac{a^2}{c}$. 因为$|AF_2|=2|F_2B|$，所以点B到右准线的距离$d_2=\dfrac{a^2}{2c}$，则点F_2到右准线的距离$d_3=\dfrac{2a^2}{3c}$，故$|OF_2|=\dfrac{a^2}{c}-\dfrac{2a^2}{3c}=\dfrac{a^2}{3}=1$，解得$a^2=3$. 下同解法1.

评注　解法5先利用第一定义，得到A为椭圆短轴端点，再利用第二定义得到A到右准线的距离，根据$e=\dfrac{|AF_2|}{d_1}=\dfrac{|F_2B|}{d_2}$，从而得到$B$到右准线的距离，进而根据平几知识把$|OF_2|$用基本量来表示，从而求得$a$的值. 一般地，圆锥曲线中涉及与焦点有关的问题常用定义入手，包括第一定义、第二定义，利用定义往往会使得运算简化.

3 背景探究

探究1　椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，$F_1$、$F_2$分别为左、右焦点，$\angle PF_2F_1=\alpha,\angle PF_1F_2=\beta$，$\angle F_1PF_2=\gamma$.

则椭圆的离心率$e=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$.

证明　如图2，$\triangle PF_1F_2$中，$\dfrac{|PF_1|}{\sin\alpha}=\dfrac{|PF_2|}{\sin\beta}=\dfrac{|F_1F_2|}{\sin\gamma}=\dfrac{|PF_1|+|PF_2|}{\sin\alpha+\sin\beta}$，

所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{|F_1F_2|}{|PF_1|+|PF_2|}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$.

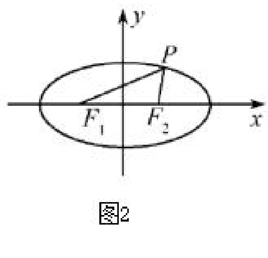

图2

根据以上结论，本题可另解：同解法2，$\cos\gamma=\dfrac{1}{3}$，

所以$e=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}=\dfrac{\cos(\dfrac{\pi-\gamma}{2})}{1}=\sin\dfrac{\gamma}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\gamma}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{a}$. 则$a=\sqrt{3}$.

下同解法 1.

探究 2 如图 3，设椭圆的$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的左右焦点分别为F_1，F_2， P、Q为曲线上两点，且$PQ// F_1F_2$ ，连接PF_2相交或延长相交曲线于点R ，设$\overrightarrow{PF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2R}(\lambda\neq 0)$ ，若$|PQ|=m|F_1F_2|(m\geq 0)$ ，椭圆的离心率为e ，则有$(2m+\lambda+1)e^2=\lambda-1$.

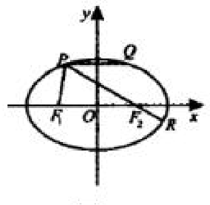

图3

证明 设$P(-mc,h),R(x_1,y_1)$. 又$F_2(c,0)$ ，由$\overrightarrow{PF_2}=\lambda\overrightarrow{F_2R}$得$x_1=\dfrac{m+\lambda+1}{\lambda}c,y_1=-\dfrac{h}{\lambda}$.

因为P、R在椭圆上，所以$\dfrac{m^2c^2}{a^2}+\dfrac{h^2}{b^2}=1,\dfrac{(m+\lambda+1)^2c^2}{\lambda^2a^2}+\dfrac{h^2}{\lambda^2b^2}=1$.

两式消去h得$\lambda^2-1=\dfrac{(m+\lambda+1)^2c^2}{a^2}-\dfrac{m^2c^2}{a^2}$,

即$\lambda^2-1=\left[(m+\lambda+1)^2-m^2\right]\cdot e^2$ ，化简得$(2m+\lambda+1)e^2=\lambda-1$ ，证毕.

同理，可证双曲线有相同的结论.

根据以上结论，本题可另解：同解法 1， A为椭圆短轴端点. 令$m=0,\lambda=2$ ，则$e^2=\dfrac{1}{3}$.

因为$c=1$，所以$a^2=3$. 下同解法 1.

荀况说过：“不登高山，不知天之高也；不临深谷，不知地之厚也；不闻先王之遗言，不知学问之大也. ”正如荀况所说，近几年数学高考试题的命制也从更高的观点展望和突破. [1] 一道看似平淡无奇的高考题，若我们加以探究，可能会发现一题多解那片“美丽的风景”，再由特殊推广到一般，探究其命题的背景，则我们更能把握问题的实质，更好地统领问题的全局.

参考文献:

[1]陈淑贞 陈清华. 浅谈基于名题背景的试题编制[J]. 数学通报，2012(1):6-11.