

高三二轮复习课“立体几何中的作图问题”的教学实录与感悟

莆田第二中学 蔡海涛

本文系福建省基础教育课程教学研究课题《高中数学主干知识教学落实核心素养的研究——以函数、立几、数列为例》(课题编号: MJYKT2018-056) 研究成果之一.

2019年4月2日-4日,福建省第三批高中数学基地学校研讨活动在厦门集美中学举行,研讨的主题是解决高中数学教育教学实践中存在的重难点问题,提升2019年高考备考的科学性、针对性,提升教育质量.会议期间,笔者应邀开设了一节高三微专题复习课“立体几何中的作图问题”.现将这节课的教学过程、设计意图、课后感悟整理成文,期待抛砖引玉.

1 教学过程

1.1 切入主题

师:我们知道,解决立体几何问题需要一定的空间想象能力,研究往往从图形开始,这就要求我们要有识图、作图、用图的能力.在近几年的高考及省、市质检中,立体几何作图问题频频出现,而考生的答题情况不容乐观.作图问题就是定性几何图形的位置关系,而在立体几何中最重要的位置关系就是平行和垂直.今天就和同学们一起来研究立体几何中涉及平行和垂直的作图问题.

设计意图:开门见山,直奔主题,提高课堂效率,符合高三数学复习课的特点,同时让学生感受学习这节课的必要性,提升学习的兴趣.

1.2 平行问题

师:请同学们看例1,先考虑第1小题.

例1 (人教A版必修二63页B组第1题改编)一木块如图1所示,点 P 在平面 VAC 内, D 、 E 分别为棱 AB 、 VB 中点.

(1)过点 P 和直线 DE 将木块锯开,应该怎样画线?

(2)过点 P 将木块锯开,使截面平行于直线 VB 和 AC ,应怎样画线?

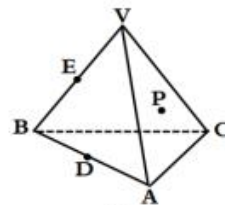


图1

生1:点 P 和 DE 确定一个平面,连结 PD 、 PE 、 DE ,即为所求画线.

师: P 、 D 、 E 三点共面,但题意要求的画线是画在如图三棱锥(木块)的表面上,所以实质上是要画出平面 PDE 与三棱锥表面的交线,直线 PD 、 PE 就不符合要求了.那么我们该怎么画呢?

生2:过点 P 作 MN 平行于 VA ,交 AC 于 M ,交 VC 于 N ,连结 DM 、 NE 、 ED ,即为所求画线.

师:回答正确,你是怎么想到的?

生2:首先注意到 DE 与平面 VAC 平行,根据线面平行的性质,平面 PDE 与平面 VAC 的交线与直线 DE 平行,又因为 $DE//VA$,所以作 VA 的平行线 MN ,然后再连结 D 、 M 、 N 、 E 各点就好了.

师:非常好,画两个平面的交线,常常要观察线面平行的关系,根据线面平行的性质,得到两平面的交线.另外,同学们在过一点作已知直线的平行线时,要在某个平面做出,如这道题目中过点 P 作 MN 平行 DE 就不合理了.接下来,请同学们看第2小题.

生3:过点 P 作 FG 平行 AC ,交 VC 于 F ,交 VA 于 G ,过点 G 作 GH 平行 VB ,交 AB

于 H , 过点 H 作 HI 平行 AC , 交 BC 于 I , 连结 IF , 则平面 $FGHI$ 即为所求.

教师投影例 1 两道题目的解答过程.

设计意图: 引导学生初步感受立体几何中的作图问题, 明确几何作图的每个环节都需要有理有据. 涉及平行关系的作图问题, 一般根据平行的性质来寻找求解问题的途径.

师: 通过例 1, 同学们基本知道了解决立体几何涉及平行的作图问题的一般方法, 下面通过例 1 的变式来巩固下.

变式 (2019 年莆田市高三质检 · 理 19 改编)

如图 2, 边长为 2 菱形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 AB, BC 的中点, 将 $\triangle DAE, \triangle DCF$ 分别沿 DE, DF 折起, 使 A, C 重合于点 P , 如图 3. 在棱 PD 上找点 G , 使得 $PB \parallel$ 平面 EFG , 并说明理由.

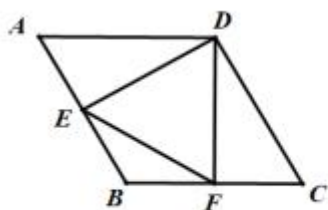


图2

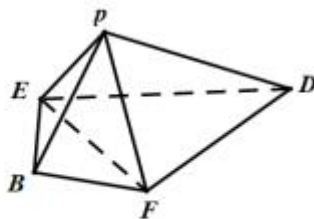


图3

学生思考、练习后, 教师投影生 4 的解答如下:

解: 当 $\frac{PG}{GD} = \frac{1}{3}$ 时, $PB \parallel$ 平面 EFG . 证明如下: 如图 4、5,

在菱形 $ABCD$ 中, 连接 AC, BD , 设 $BD \cap EF = O, BD \cap AC = M$.

又 E, F 分别是 AB, BC 的中点, 所以 $\frac{BO}{OD} = \frac{1}{3}$. 连接 OG , 又 $\frac{PG}{GD} = \frac{BO}{OD} = \frac{1}{3}$,

所以 $PB \parallel OG$. 因为 $OG \subset$ 平面 $EFG, PB \not\subset$ 平面 EFG , 所以 $PB \parallel$ 平面 EFG .

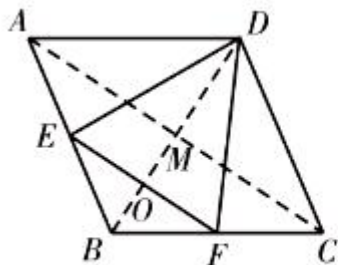


图4

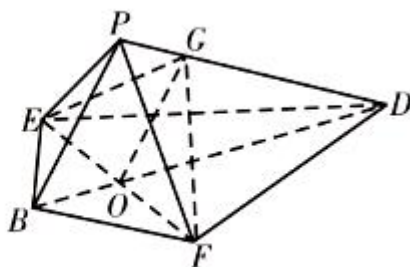


图5

师: 答案正确, 书写规范, 真棒! 对于 $\frac{PG}{GD} = \frac{1}{3}$ 这个关系式, 你是如何想到的? (提问生 4)

生 4: 先假设 $PB \parallel$ 平面 EFG , 则可根据线面平行的性质, 直线 PB 必与过 PB 的平面与平面 EFG 的交线平行. 所以连结 BD , 发现两平面的交线即为 OG , 然后在 $\triangle BPD$ 中, 由 $\frac{PG}{GD} = \frac{BO}{OD}$ 即得到 G 点的位置.

师: (肯定) 对于探究性问题, 一般是先假设结论成立, 通过这个结论来发现性质, 确定几何图形的特征. 另外, 通过这一小题, 同学们也要总结立几中折叠问题的图形特点, 注意观察图形在折叠前后位置关系与长度关系变化的情况.

设计意图: 通过例 1 及例 1 变式, 分析这两道题中立几作图平行问题的共性, 都是从平行

关系的性质入手, 确定几何图形的位置关系, 然后再作出图形.

1.3 垂直问题

师: 请同学们看例 2, 先完成第 1 问.

例 2 如图 6, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 $AB = 16$, $BC = 10$, $AA_1 = 8$, 点 E, F 分别在 A_1B_1, D_1C_1 上, $A_1E = D_1F = 4$, 面 A_1C_1 上有一点 O .

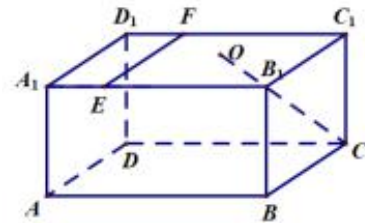


图6

(1) (人教 A 版必修二 78 页 B 组第 1 题改编) 经过点 O 在平面 A_1C_1 上画一条直线与直线 CO 垂直, 怎样画?

(2) (2015 年高考全国 II 卷·理 19) 过点 E, F 的平面 α 与此长方体的面相交, 交线围成一个正方形, 在图中画出这个正方形 (不必说出画法和理由).

生 5: (1) 步中, 连结 OC_1 , 在面 A_1C_1 上, 过点 O 作一直线与 OC_1 垂直, 即为所求.

师: (追问) 你是如何利用已有的垂直关系这么作图的?

生 5: 首先发现 $CC_1 \perp$ 平面 A_1C_1 , 所以所求直线必与平面 CC_1O 垂直, 因此只须在面 A_1C_1 上作 OC_1 垂线即可.

师: 非常好. 对于垂直关系的作图, 与平行关系的作图类似, 也是先去寻找原有的位置关系, 再利用性质解题. 这道题关键就是要发现 $CC_1 \perp$ 平面 A_1C_1 , 然后去构造垂直 (过点 O 作一直线与 OC_1 垂直), 从而得到新的线面垂直关系 (所求直线垂直平面 CC_1O), 再得到所求直线垂直 CO .

设计意图: 例 2 的解题策略是寻找已有线面垂直关系, 构造线线垂直, 得到新的线面垂直关系. 这种方法也是经过平面 α 外一定点 P 向平面 α 内一条定直线 AB 引垂线的常用方法, 即先经过 P 点作平面 $PO \perp \alpha$ 于 O , 再过 O 作 $OH \perp AB$ 于 H , 连结 PH , 即为所求, 该模型实则三垂线定理的模型.

(片刻后) 投影生 6 例 2 第 (2) 的解答, 如下:

解: (2) 交线围成的正方形 $EHGF$ 如图 7:

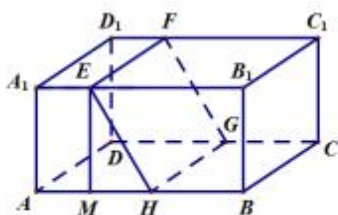


图7

师: (追问) 你确定你所画的图形是正方形, 点 H 在什么位置?

生 6: 因为平面 $AC \parallel$ 平面 A_1C_1 , 平面 $AB_1 \parallel$ 平面 DC_1 , 所以平面 α 与此长方体的面相交的交线围成的四边形为平行四边形, 又 EF 垂直平面 AB_1 , 所以该平行四边形为矩形. 因此只须考虑 $EF = EH = 10$, 即满足题意. 在矩形 ABB_1A_1 中, 可求得 $AH = 10$.

师: 很好. 作长方体截面, 要充分利用平行垂直关系, 先判断截面图形的形状, 确定位置关系, 再确定长度 (角度).

设计意图: 涉及垂直关系问题的作图, 引导学生观察已有的垂直关系, 通过在某个平面作线线垂直, 得到新的线线垂直或线面垂直, 即一般通过线面垂直与线线垂直关系的互相转化来处理.

1.4 巩固提升

师: 请同学们做道练习题.

(2019 年福州市高三质检·文 19) 如图 8, 四棱锥 $E-ABCD$, 平面 $ABCD \perp$ 平面 ABE , 四边形 $ABCD$ 为矩形, $AD=6$, $AB=5$, $BE=3$, F 为 CE 上的点, 且 $BF \perp$ 平面 ACE .

(1) 求证: $AE \perp BE$; (略)

(2) 设 M 在线段 DE 上, 且满足 $EM = 2MD$, 试在线段 AB 上确定一点 N , 使得 $MN \parallel$ 平面 BCE , 并求 MN 的长.

同学们自主练习后, 教师投影第 2 问的解答.

生 7: (2) 解法一: 在 $\triangle ADE$ 中过 M 点作 $MG \parallel AD$ 交 AE 于 G 点, 在 $\triangle ABE$ 中过 G 点作 $GN \parallel BE$ 交 AB 于 N 点, 连 MN (如图 9).

因为 $EM = 2MD$, 所以 $EG = 2GA$, $BN = 2NA$. 因为 $NG \parallel BE$, $NG \not\subset$ 平面 BCE , $BE \subset$ 面 BCE , 所以 $NG \parallel$ 平面 BCE . 同理, $GM \parallel$ 平面 BCE .

因为 $MG \cap GN = G$, 所以平面 $MGN \parallel$ 平面 BCE , 又因为 $MN \subset$ 平面 MGN , 所以 $MN \parallel$ 平面 BCE , 所以 N 点为线段 AB 上靠近 A 点的一个三等分点.

因为 $AD=6$, $AB=5$, $BE=3$, 所以 $MG = \frac{2}{3}AD = 4$,

所以 $NG = \frac{1}{3}BE = 1$, 所以 $MN = \sqrt{MG^2 + NG^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$.

生 8: 过 M 点作 $MG \parallel CD$ 交 CE 于 G 点, 连接 BG , 在 AB 取 N 点, 使得 $BN = MG$, 连结 MN (如图 10), 因为 $AB \parallel CD$, $EM = 2MD$,

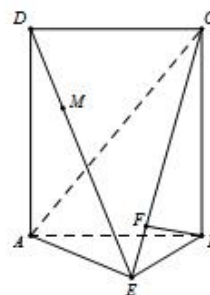


图8

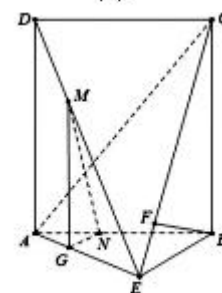


图9

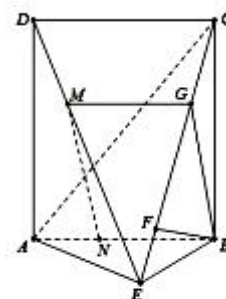


图10

所以 $MG = \frac{2}{3}CD$, 因为 $AB // CD$, $BN = MG$,

所以 $MG // BN$, $MG = BN$,

所以四边形 $MGBN$ 是平行四边形,

则 $MN // BG$, 又因为 $MN \not\subset$ 平面 BCE , $BG \subset$ 平面 BCE ,

所以 $MN //$ 平面 BCE ,

所以 N 点为线段 AB 上靠近 A 点的一个三等分点,

在 $\triangle CBG$ 中, 因为 $BC = AD = 6$, $CG = \frac{1}{3}CE = \frac{1}{3}\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{5}$, $\cos \angle BCG = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以 $BG^2 = 36 + 5 - 2 \times 6 \times \sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 17$, $MN = BG = \sqrt{17}$.

师:两位同学完成得很好,这两种方法就是证明线面平行的常用方法,即通过面面平行来证明和通过线线平行来证明.

设计意图:通过练习,进一步提升同学们立几作图的能力,引导学生归纳平行与垂直的作图的一般方法.作图方法的多样性可引导学生多角度思考问题.

1.5 归纳总结

师:请同学们交流总结下本节课的学习心得.

生:通过本节课的学习,我们体会到立体几何中如何更好去识图、作图、用图,如何利用平行、垂直的性质去解决涉及平行、垂直的作图问题,在作图中提升了空间想象能力,书写中提升推理论证能力.

师:(结束语)同学们总结得很到位,希望大家在以后作图的学习中进一步提升直观想象和逻辑推理的素养.

2 教学感悟

2.1 微专题究竟微在哪

高三二轮专题复习中,教师通常围绕热点问题开展微专题复习.“微专题”的“微”要立足学生的学情(学生哪个模块哪个类型题目比较薄弱,为什么比较薄弱),切口小、针对性强,只有“微”到点上,才能做到精准教学,复习高效^[1].2016年全国I卷文科第18题,是一道涉及垂直关系的立体几何作图问题,该题实测得分率非常低.这一现象反映了很多教师在平时的教学中,不舍得花一定的时间教学生怎么看图,怎么作图,从而没有很好地培养学生识图、作图、用图的能力.本节课围绕“立体几何中的作图问题”设计教学,利用平行和垂直两种关系的作图,讲明作图的原理,培养模型意识,涵盖了立体几何中线线、线面、面面平行垂直关系的转化,培养了空间想象、推理论证等能力,发展了数学抽象、直观想象、逻辑推理、数学运算的数学学科核心素养,起到了以微带面的效果.

2.2 高三复习应回归教材

在高考中,立体几何的作图题多次出现,如2018年全国III卷文科第19题,2016年全国I卷文科第18题;2016年四川卷理科第18题;2013年福建卷理科第19题;2013年福建卷文科第18题;2013年湖北卷理科第19题;2013年四川卷理科第19题,文科第19题;2013年安徽卷理科第15题、文科第15题;2009年安徽卷理科第18题;2002年全国卷文科第22题等.这些作图题蕴含着空间想象、推理论证,考查了立体几何中最重要的两项基本功.所以说,高三立体几何的备考,一定要落在“基础”上,无论是哪种层次的考生,基础部分的分值至关重要.因此,在备考时要回归教材.基于此,笔者在例题的选择上都是以课本的

例题为母题，然后再进行变式，通过变式，可以发现很多高考题都是源于教材，希望以此来引发学生和听课教师对回归教材的思考，让师生在备考时真正做到回归教材，聚集高考。

参考文献:

[1] 王岳. 以微知广 以点带面——高三二轮复习课“多元变量问题处理方法研究”的教学实录与感悟[J]. 中学数学月刊, 2018(11):31-34.