关于向量是沟通代数、几何与三角的桥梁的思考

林运来　　　　　　　　　　　　蔡海涛

（福建省厦门大学附属实验中学）　（福建省莆田第二中学）

一、问题提出

向量理论具有深刻的数学内涵、丰富的物理背景，是进一步学习和研究其他数学领域问题的基础，在解决实际问题中发挥重要作用[1].向量集“数”“形”于一身，既可以类似像数那样进行运算，其本身又是一个图形，因此，向量是体现数形结合方法的良好载体，是沟通代数、几何、三角的桥梁[2].既然向量是沟通代数、几何与三角的一种桥梁，那么，桥梁总是双向沟通的.我们理所当然地也会考虑，在向量背景下，将代数中的某个问题看成与几何相关的问题，反过来用几何方法解决代数问题.换句话说，能不能用向量方法解决一些代数问题？用向量方法可以解决什么代数问题？本文是笔者关于向量是沟通代数、几何与三角的桥梁对向量教学所作的一点思考，愿与同行们一起探讨.

向量作为工具研究几何问题，开创了研究几何问题的新方法.建立向量运算与几何图形之间的关系后，对图形的研究推进到了有效能算的水平，从而实现了综合几何到向量几何的转折[3].利用向量，将几何问题转化为代数问题来解决，这是向量的主要功能，而且这种方法是普遍有效的，它已经是几何研究中的一个基本方法了（平面几何中的向量方法）.把这个方法应用于代数，也就是在向量背景下，将某些代数问题转化为几何问题来解决，这也应成为向量的一个功能.

认识到向量具有上述两方面的功能，即它是一个双刃的工具[4]，对于向量的教学具有重要意义.

二、用几何眼光审视向量背景下的“代数问题”

数形结合思想是数学思想的精髓之一，是知识转化为能力的杠杆，它可以使某些抽象的问题直观化、生动化，能够变抽象思维为形象思维，有助于把握问题的本质.首先，只有意识到向量也有将代数问题转化为几何问题的功能，才会用几何的眼光来审视向量背景下的代数问题，回归到问题的几何意义，画出图来问题就很容易解决（有时甚至不需要画图）.

例 1　已知ΔABC，若对任意$t\in R$，$\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|\ge\left|\overrightarrow{AC}\right|$，则$\Delta ABC$一定是（　）

A.锐角三角形　　B.钝角三角形　　C.直角三角形　　D.答案不确定

剖析　从运算这一角度看，向量是代数研究的对象.从代数角度看，此题的关键条件是不等式$\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|\ge\left|\overrightarrow{AC}\right|$，其左边是关于$t$的变量，右边是一个定值，不等式$\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|\ge\left|\overrightarrow{AC}\right|$表示函数$f(t)=\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|$的最小值是$\left|\overrightarrow{AC}\right|$.因此，此题可谓“向量运

算表其外，函数最值蕴其中”，可以通过函数模型表征题设条件，利用函数思想进行处理.

设ΔABC中角A,B,C的对边分别为a,b,c，

由$\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|\ge\left|\overrightarrow{AC}\right|$，得$\overrightarrow{BC}^2t^2-2t\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}^2\ge\overrightarrow{AC}^2$，

即$a^2t^2-2(ac\cos B)t+c^2-b^2\ge 0$，

设$f(t)=a^2t^2-2(ac\cos B)t+c^2-b^2$，

则$\Delta_t=(2ac\cos B)^2-4a^2(c^2-b^2)\le 0$，

化简得$b^2\le c^2\sin^2 B$，即$b\le c\sin B$.

由正弦定理，得$\sin B\le\sin C\sin B$，所以$\sin C\ge 1$，即$C=\dfrac{\pi}{2}$. 应选 C.

这里不妨追问，向量背景下不等式$\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|\ge\left|\overrightarrow{AC}\right|$的几何意义是什么？进一步，反过来看，能用几何方法解决这个问题吗？这需要灵活地运用平面几何、平面向量、三角函数等知识，尽可能地使这个“代数表达式”具有几何意义，从而转化成几何问题来解决.

事实上，对任意给定的实数t，在直线BC上总存在点D，使$\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BC}$，所以

$\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{DA}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|\ge\left|\overrightarrow{AC}\right|$，

所以$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BC}$，因此$\Delta ABC$是直角三角形，应选 C.

由此，不难得出向量表达式$\left|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}\right|\ge\left|\overrightarrow{AC}\right|$的几何意义如图 1 所示：

从同一点（A）出发向一条定直线（BC）引线段，长度最小的线段（AC）一定与该直线垂直.

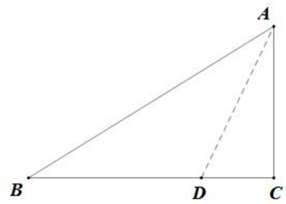

图1

例 2　已知向量$\vec{a}\ne\vec{e}$，$|\vec{e}|=1$，对任意$t\in R$，恒有$|\vec{a}-t\vec{e}|\ge|\vec{a}-\vec{e}|$，则（　）

（A）$\vec{a}\perp\vec{e}$　（B）$\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{e})$　（C）$\vec{e}\perp(\vec{a}-\vec{e})$　（D）$(\vec{a}+\vec{e})\perp(\vec{a}-\vec{e})$

剖析　与例 1 类似，此题既可以作为“代数问题”来处理，也可以结合题设条件中的向量数量特征，用好“向量法”与“几何法”的衔接点——隐含的“垂直关系”，通过数形结合，自然生成“向量法”，使问题的条件和结论的关系简洁明了的展现出来，直观、具体，从而使问题得到解决.

设$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OE}=\vec{e}$，对任意给定的实数$t$，在直线$OE$上总存在点$D$，使$t\vec{e}=\overrightarrow{OD}$，所以$|\vec{a}-t\vec{e}|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}\right|=\left|\overrightarrow{DA}\right|\ge|\vec{a}-\vec{e}|=\left|\overrightarrow{EA}\right|$，所以$\overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{OE}$，即$\vec{e}\perp(\vec{a}-\vec{e})$. 应选 C.

三、挖掘某些代数表达式的几何意义，构造向量解答问题

其次，在向量背景下，由于一个代数问题能用几何方法来解的前提是它具有几何意义，因此，向量教学中还要注意培养学生分析和寻找一些代数表达式的几何意义的能力. 人教 A

版教材也有意识地通过一些习题训练和引导学生，看到与向量有关的表达式，能说出它们的几何意义.

例 3[3]　已知向量$\vec{a},\vec{b}$为非零向量，求证：$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$，并解释其几何意义.

例 4[3]　已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$为非零向量，且$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c},\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}$，求证：$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|\Leftrightarrow\vec{c}\perp\vec{d}$，并解释其几何意义.

不难发现，例 3 中向量表达式的几何意义是“矩形的两条对角线相等”，例 4 中向量表达式的几何意义是“菱形的对角线互相垂直”. 但更多的时候，我们所遇见的代数表达式，其几何意义不是一眼就能看出来的，也就是说只靠直接翻译不行了，需要灵活地运用几何知识，有时还要适当变形，或进行猜想，总之要想方设法，尽可能地使面前这个代数表达式具有几何意义，从而转化成几何问题来解决[4].

例 5[3]　证明：对于任意的$a,b,c,d\in R$，恒有不等式

$(ac+bd)^2\le(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

剖析　构造向量$\overrightarrow{AB}=(a,b),\overrightarrow{AC}=(c,d)$.

因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta$（其中$\theta$为向量$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$的夹角，即$\theta=\angle BAC$）.

所以$ac+bd=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\cos\theta$，

即$(ac+bd)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\cos^2\theta\le(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

其中等号成立的条件是$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$共线.

这里，通过构造向量，将问题转化为向量数量积问题，是代数与几何的完美结合. 问题解决的关键在于构造出相应的向量模型，也就是找出已知代数表达式在向量背景下的几何表征，通过解答相应的几何问题使原问题获解. 回顾这个解答过程，可知其中的微观处理并不难，难就难在如何联想到向量的数量积，而想到它的前提在于宏观地把握式子的结构. 所以，式子的结构才是引领思路的关键因素[5]. 利用“结构特征”解题，不仅意味着我们需要有完整性和融通性的知识结构，而且解题的关键之处还在于两点：一是需要敏锐的洞察力，善于抓住所求问题的结构特征；二是善于联想，将已知条件或者待求结论与某一公式、法则或者某一数学对象实现对接，进而创造性地解决问题[6].

例 5 实质上就是“两个向量的数量积不大于它们的长度之积”. 从中可以总结得出用向量研究代数问题的关键步骤.

第一步，代数式子向量化，即用向量的语言来表达代数式子，如可用向量$\overrightarrow{AB}=(a,b)$与$\overrightarrow{AC}=(c,d)$的数量积刻画$ac+bd$，可用向量$\overrightarrow{AB}=(a,b)$的长度的平方刻画$a^2+b^2$，等.

第二步，向量式子数量化，即通过向量的运算解决相关问题.

用向量法来研究问题时，包括几何问题、物理问题，甚至代数问题，可以实现形象思维与抽象思维的有效结合，这就不仅使向量方法成为研究数学问题的一个强有力的工具，而且有助于学生思维能力的培养[2]，感受到数形结合方法的力量和作用，进一步发展数学抽象等核心素养，从数学“具体化世界”发展到“过程符号化世界”[7].

向量是描述直线、曲线、平面、曲面以及高维空间数学问题的基本工具[1]. 高维向量被广泛地用于描述多指标的对象，从而在各个领域，包括社会科学，都有着广泛的应用[2]. 例如，我们可以通过构造n维向量，得出例 5 的推广形式.

设n为大于 1 的自然数，若a_i, b_i（$i=1,2,...,n$）为任意实数，则

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \le (\sum_{i=1}^{n} a_i^{\ 2})(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\ 2}) .$$

其中等号当且仅当$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$时成立（当$b_i=0$时，约定$a_i=0$，$i=1,2,...,n$）.

例 6　单位圆$x^2+y^2=1$上有三点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$，若$x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=0$.

求证：$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}+y_3^{\ 2}=\dfrac{3}{2}$.

剖析　此题表面上考查的是解析几何问题，如果直接从解几角度来思考，处理起来会比较麻烦，甚至可能导致半途而废. 若能从向量的角度展开丰富的联想，则会碰撞出激烈的思维火花，出现“柳暗花明又一村”的景象.

设O为坐标原点，由于$x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=0$，则$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,

所以O为ΔABC的重心，因为ΔABC是正三角形，且$|OA|=|OB|=|OC|=1$，

所以ΔABC是等边三角形，且$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\dfrac{2\pi}{3}$.

不妨设$A(\cos\theta,\sin\theta)$，$B(\cos(\theta+\dfrac{2\pi}{3}),\sin(\theta+\dfrac{2\pi}{3}))$，$C(\cos(\theta+\dfrac{4\pi}{3}),\sin(\theta+\dfrac{4\pi}{3}))$.

则$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=\cos^2\theta+\cos^2(\theta+\dfrac{2\pi}{3})+\cos^2(\theta+\dfrac{4\pi}{3})=\dfrac{3}{2}$,

同理$y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}+y_3^{\ 2}=\sin^2\theta+\sin^2(\theta+\dfrac{2\pi}{3})+\sin^2(\theta+\dfrac{4\pi}{3})=\dfrac{3}{2}$.

这里，构造等边三角形，使三角形重心的（向量）性质恰到好处地体现了已知条件的数量特征，这为通过“数”的运算处理“形”的问题搭起了桥梁，让人耳目一新，赏心悦目，不仅减少运算步骤，对拓展学生的解题思路、增强其思维品质也会有很大帮助.

例 7 $\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi=$____.

剖析 此题若作为“三角问题”来处理，当然也可以算出来，但从题中涉及到的角的数量特征来看，发现这些角依次相差 $\frac{2}{7}\pi$ ，联想到等差数列 $\frac{2}{7}\pi,\frac{4}{7}\pi,\frac{6}{7}\pi,\frac{8}{7}\pi,\frac{10}{7}\pi,\frac{12}{7}\pi$ ，注意到 $\cos\frac{8}{7}\pi=\cos\frac{6}{7}\pi,\cos\frac{10}{7}\pi=\cos\frac{4}{7}\pi,\cos\frac{12}{7}\pi=\cos\frac{2}{7}\pi$ ，在直角坐标系 xOy 中作单位正七边形 $ABCDEFG$ ，如图 2 所示. 使 $\overrightarrow{AB}=(1,0)$ ，

$$\overrightarrow{BC}=(\cos\frac{2}{7}\pi,\sin\frac{2}{7}\pi),\overrightarrow{CD}=(\cos\frac{4}{7}\pi,\sin\frac{4}{7}\pi),\overrightarrow{DE}=(\cos\frac{6}{7}\pi,\sin\frac{6}{7}\pi)\ ,$$

$$\overrightarrow{EF}=(\cos\frac{8}{7}\pi,\sin\frac{8}{7}\pi),\overrightarrow{FG}=(\cos\frac{10}{7}\pi,\sin\frac{10}{7}\pi),\overrightarrow{GA}=(\cos\frac{12}{7}\pi,\sin\frac{12}{7}\pi)\ .$$

由于 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GA}=\mathbf{0}$，

所以 $1+\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi+\cos\frac{8}{7}\pi+\cos\frac{10}{7}\pi+\cos\frac{12}{7}\pi=0$ ，

则 $\cos\frac{2}{7}\pi+\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{6}{7}\pi=-\frac{1}{2}$.

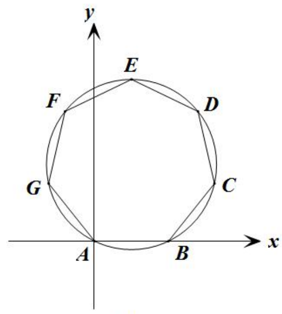

图1

图象直观看得清楚，代数论证也不困难. 这里，正七边形作为建模的对象恰到好处地体现了题目中角度的数量特征，根据零向量的特殊性，“以形解数”，使问题迅速得解. 这就需要解题者具有敏锐的观察力与想象能力，如果没有一定的建模训练，是很难“创造”出如此简洁、优美的证明的[8].

再如，《普通高中数学课程标准（实验）》对两角差余弦公式的要求是：“经历用向量的数量积推导两角差的余弦公式的过程，进一步体会向量方法的作用. ”但教学实践表明，直接利用向量推导两角差余弦公式常常让学生感到牵强、不自然. 下面的做法值得借鉴[9].

如图 3 所示，倾角为 β 的斜坡上，一物体在力 **F** 的作用下前进了 1 m ，已知 $|\mathrm{F}|=1N$ ，力的方向与水平方向所成角为 α ，求此过程中力 **F** 所做的功 **W**.

将力 **F** 正交分解，得水平方向和竖直方向的两个分力 $\mathbf{F}_1$、$\mathbf{F}_2$，将位移 **s** 也按同样的方向作正交分解为 $\mathbf{s}_1$、$\mathbf{s}_2$，可以具体计算出 $\mathbf{W}_1$、$\mathbf{W}_2$，再求出和功 **W**.

发现：由 $\mathbf{W}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}=\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{s}_1+\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{s}_2$，

有 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

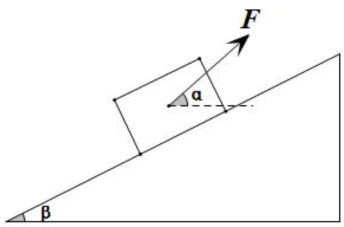

图3

此法引导学生解决物理问题，既归纳出两角差的余弦公式，又体现出物理与数学的关系，利于提高学生研究问题、分析问题和解决问题的视野，让学生逐步感受到向量是沟通代数、几何与三角的工具，进而学会用向量语言表述问题、解决问题.

在数学新课程的教学中，融入物理等其它学科思维和知识，不仅适应新课程的理念，有

助于激发学生的想象力和思维的张力，提升学生的数学思维能力，还能培养学生从不同角度认识问题的习惯，从多个角度寻找问题的突破口，启发学生展开丰富的想象，激活所学知识，打开更多通往未知世界的窗，形成多种不同的解法，发展思维能力，培养创新意识，提升核心素养.

四、简要结语

高中数学教学要使学生体会知识之间的有机联系，感受数学的整体性[10].几何与代数是高中数学课程的主线之一.在必修课程与选择性必修课程中，突出几何直观与代数运算之间的融合，即通过形与数的结合，感受数学知识之间的关联，加强对数学整体性的理解[1].在向量教学中，要从具体、直观入手，帮助学生将向量的代数运算与它的几何意义联系起来，这样才能运用向量的代数性质更好地刻画几何对象；反之，从几何意义联想代数表示，进行更为深入的研究，从而体会代数与几何的联系，数形结合的方法及其在解决问题中的力量.这种力量集中体现在它仅用“向量相加的首尾相接法则”、“向量数乘的意义和运算律”、“向量数量积的意义和运算律”、“平面向量基本定理”等四条基本法则[11]来解决几何问题.这些是进行向量教学时应该关注的核心问题，也是从方法论的角度看待平面向量给我们的重要启示.

参考文献：

[1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准（2017年版）[S].北京：人民教育出版社，2018.

[2]钱佩玲.钱佩玲数学教育文选[M].北京：人民教育出版社，2012.

[3]刘绍学主编.普通高中课程标准实验教科书（A版）·数学4（必修）[M].北京：人民教育出版社，2007.

[4]王敬庚.王敬庚数学教育文选[M].北京：人民教育出版社，2011.

[5]周三军.结构引领思路[J].中国数学教育（高中），2017（11）：57-60.

[6]林运来.根据结构巧联想，他山之石可攻玉[J].数学通讯（上），2015（7-8）：58-60.

[7]鲍建生，周超.数学学习的心理基础与过程[M].上海：上海教育出版社，2009.

[8]段志贵.构造：让解题突破思维瓶颈[J].数学通报，2018（9）：53-57.

[9]刘正章.追溯数学文化气息，提升学生数学素养——基于“两角差的余弦公式”的教材分析与教学思考[J].中学数学杂志，2018（9）：1-5.

[10]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准（实验）[S].北京：人民教育出版社，2003.

[11]张景中，彭翕成.向量教学存在的问题及对策[J].数学通报，2009（9）：7-12.