例析一类含参问题的解法

谢新华

摘要：利用导数研究函数的单调性问题中，已知函数单调性求参数问题是一类非常重要的题型，要求能根据已知条件列出参数所满足的等量关系（或不等关系），通过研究方程（或不等式）实现问题的解决，必要时需对参数的不同取值情况进行分类讨论.

关键词：参数；单调性；恒成立；有解

例 1.函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，求实数 a 的取值范围.

【解析】因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，

所以 $f'(x)=3x^2+2ax+1\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $a\geq -(\frac{3x}{2}+\frac{1}{2x})$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

因为 $-(\frac{3x}{2}+\frac{1}{2x})\leq -2\sqrt{\frac{3x}{2}\cdot\frac{1}{2x}}=-\sqrt{3}$（当且仅当 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立），

所以实数 a 的取值范围是 $[-\sqrt{3},+\infty)$.

【点评】已知函数为增函数（或减函数），求参数的取值范围，其基本解法是将其转化为 $f'(x)\geq 0$（或 $f'(x)\leq 0$）在给定区间上恒成立，再通过参变分离转化为求函数的最值问题，利用基本不等式可求得函数的最值，从而求得参数的取值范围.

例 2.函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$ 在 $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ 为减函数，求实数 a 的取值范围.

【解析】因为函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ 为减函数，

所以 $f'(x)=3x^2+2ax+1\leq 0$ 在 $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ 上恒成立，

由图象可得 $\begin{cases} f'(-\frac{2}{3})\leq 0 \\ f'(-\frac{1}{3})\leq 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} \frac{4}{3}-\frac{4}{3}a+1\leq 0 \\ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}a+1\leq 0 \end{cases}$，解得 $a\geq 2$.

所以实数 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$.

【点评】已知函数为增函数（或减函数），求参数的取值范围，其基本解法是将其转化为 $f'(x)\geq 0$（或 $f'(x)\leq 0$）在给定区间上恒成立，再利用二次函数的图象及性质可知，因为二次函数图象开口向上，所以只需考虑二次函数端点函数值的正负，从而求得参数的取值范围.

例 3.函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$ 的单调递减区间为 $(\frac{1}{3},1)$，求实数 a 的值.

【解析】依题意得 $f'(x)=3x^2+2ax+1<0$ 的解集为 $(\frac{1}{3},1)$，

所以 $\frac{1}{3},1$ 是方程 $3x^2+2ax+1=0$ 的两根，

所以 $\begin{cases}\frac{1}{3}+1=-\frac{2a}{3}\\ \frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}\end{cases}$, 解得 $a=-2$.

【点评】函数的单调区间是关于 x 的不等式 $f'(x)>0$（$f'(x)<0$）的解集，与函数在某个区间单调是两个不同的概念，不要混淆.

例 4.函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x$ 存在单调递减区间，求实数 a 的取值范围.

【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

因为函数 $f(x)$ 存在单调递减区间，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-ax-2<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，

所以 $a>\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，

因为 $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=(\frac{1}{x}-1)^2-1\geq -1$（当且仅当 $x=1$ 时等号成立），

所以实数 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

【点评】函数存在单调递增（或递减）区间，其基本解法是将其转化为 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$）在给定区间上有解，再通过参变分离转化为求函数的最值问题，利用配方法可求得函数的最值，从而求得参数的取值范围.

例 5.函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-2ax$ 不具有单调性，求实数 a 的取值范围.

【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+x-2a=\frac{x^2-2ax+1}{x}$，

因为函数 $f(x)$ 不具有单调性，

所以 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有解且无重根，

即 $x^2-2ax+1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有解且无重根，

所以$\begin{cases}\Delta > 0\\ 2a > 0\end{cases}$,解得 $a \geq 1$.

所以实数 a 的取值范围是$[1,+\infty)$.

【点评】连续函数在某个区间不具有单调性，其基本解法是转化为$f'(x)=0$在给定的区间上有解且无重根，再结合二次方程根的分布问题，利用判别式及韦达定理限制条件，从而求得参数的取值范围.

参考文献

[1]李红庆.谈含参的不等式恒成立或存在性成立中的参数范围[J].中学数学教学参考,2018,(3):50.
[2]胡媛媛.分离参数法解决导数问题[J].福建中学数学,2018,(7):39.
[3]朱俊杰.谈函数的单调性与导数[J].数理化学习,2015,(10):6.
[3]刘浩平.利用函数的单调性求参数的范围[J].中学生数理化,2017,(5):23.