破解含参函数的单调性问题

福建省莆田第二中学　　谢新华

例 函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，求实数 a 的取值范围.

解 因为函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，

所以 $f'(x)=3x^2+2ax+1\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $a\geq -(\frac{3x}{2}+\frac{1}{2x})$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

因为 $-(\frac{3x}{2}+\frac{1}{2x})\leq -2\sqrt{\frac{3x}{2}\cdot\frac{1}{2x}}=-\sqrt{3}$（当且仅当 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立），

所以实数 a 的取值范围是 $[-\sqrt{3},+\infty)$.

变式 1 函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$ 在 $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ 为减函数，求实数 a 的取值范围.

解 因为函数 $f(x)$ 在 $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ 为减函数，

所以 $f'(x)=3x^2+2ax+1\leq 0$ 在 $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ 上恒成立，

由图象可得 $\begin{cases} f'(-\frac{2}{3})\leq 0 \\ f'(-\frac{1}{3})\leq 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} \frac{4}{3}-\frac{4}{3}a+1\leq 0 \\ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}a+1\leq 0 \end{cases}$，解得 $a\geq 2$.

所以实数 a 的取值范围是 $[2,+\infty)$.

变式 2 函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$ 的单调递减区间为 $(\frac{1}{3},1)$，求实数 a 的值.

解 依题意得 $f'(x)=3x^2+2ax+1<0$ 的解集为 $(\frac{1}{3},1)$，

所以 $\frac{1}{3},1$ 是方程 $3x^2+2ax+1=0$ 的两根，

所以 $\begin{cases} \frac{1}{3}+1=-\frac{2a}{3} \\ \frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3} \end{cases}$，解得 $a=-2$.

变式 3 函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x$ 存在单调递减区间，求实数 a 的取值范围.

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

因为函数 $f(x)$ 存在单调递减区间，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-ax-2<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，

所以 $a>\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，

因为 $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=(\frac{1}{x}-1)^2-1\geq -1$（当且仅当 $x=1$ 时等号成立），

所以实数 a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

变式 4 函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-2ax$ 不具有单调性，求实数 a 的取值范围.

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

因为 $f'(x)=\frac{1}{x}+x-2a=\frac{x^2-2ax+1}{x}$，

因为函数 $f(x)$ 不具有单调性，

所以 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有解且无重根，

即 $x^2-2ax+1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有解且无重根，

所以 $\begin{cases}\Delta>0\\2a>0\end{cases}$, 解得 $a>1$.

所以实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

参考文献

[1]李红庆.谈含参的不等式恒成立或存在性成立中的参数范围[J].中学数学教学参考,2018,(3):50.

[2]胡媛媛.分离参数法解决导数问题[J].福建中学数学,2018,(7):39.

[3]朱俊杰.谈函数的单调性与导数[J].数理化学习,2015,(10):6.

[3]刘浩平.利用函数的单调性求参数的范围[J].中学生数理化,2017,(5):23.