2019 高考题创新解法

福建省莆田第二中学　　蔡海涛

纵观近几年的高考题，圆锥曲线中椭圆与双曲线的离心率问题一直是个热点问题.解决这类问题即求出$\dfrac{c}{a}$的值，实则是去寻找椭圆或双曲线中基本量a、b、c满足的关系式，只要求出任意两个基本量的关系，即可求出离心率的值.一般地，求解策略为利用圆锥曲线的定义与几何性质、结合方程、图形的几何特征等进行综合分析与处理，从而得以解决离心率的求值问题.[1]本文从2019年高考题中的离心率问题谈起，谈谈求解离心率问题的常见策略，期与同行交流.

例1　(2019年高考全国Ⅰ卷·理16) 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，过$F_1$的直线与$C$的两条渐近线分别交于$A$，$B$两点．若$\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\bullet\overrightarrow{F_2B}=0$，则$C$的离心率为____.

解法1：如图1，因为$\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，且$\overrightarrow{F_1B}\bullet\overrightarrow{F_2B}=0$，所以$OA\perp F_1B$，

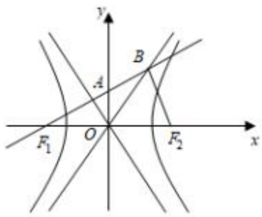

图1

则$F_1B:y=\dfrac{a}{b}(x+c)$，联立$\begin{cases}y=\dfrac{a}{b}(x+c)\\y=\dfrac{b}{a}x\end{cases}$，

解得$B(\dfrac{a^2c}{b^2-a^2}，\dfrac{abc}{b^2-a^2})$，

则$|F_1B|^2=(\dfrac{a^2c}{b^2-a^2}+c)^2+(\dfrac{abc}{b^2-a^2})^2$，$|F_2B|^2=(\dfrac{a^2c}{b^2-a^2}-c)^2+(\dfrac{abc}{b^2-a^2})^2$，

所以$(\dfrac{a^2c}{b^2-a^2}+c)^2+(\dfrac{a^2c}{b^2-a^2}-c)^2+2(\dfrac{abc}{b^2-a^2})^2=4c^2$，

整理得：$b^2=3a^2$，所以$c^2-a^2=3a^2$，即$4a^2=c^2$，所以$\dfrac{c^2}{a^2}=4$，$e=\dfrac{c}{a}=2$.

评注：法1的求解策略是根据双曲线的性质，是从$RT\triangle F_1F_2B$中去寻找基本量的等量关系，为了表示$|F_1B|$、$|F_2B|$，须先求出B点坐标，所以考虑根据已知条件先求出直线F_1B的方程，把它与直线F_2B方程联立，即可获解.此法思路直接，但运算量偏大.

解法2：如图1，$\triangle F_1F_2B$中，因为A,O分别为F_1B,F_1F_2的中点，所以$AO/\!/BF_2$，

$\angle AOF_1=\angle BF_2F_1$.又$\angle AOF_1=\angle BOF_2$，所以$\angle BOF_2=\angle BF_2F_1$，$BF_2=BO$．$RT\triangle F_1F_2B$中，

$BO=\dfrac{1}{2}F_1F_2=OF_2$，所以$BF_2=BO=OF_2$，$\angle BOF_2=60^\circ$，则$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，可得$e=\dfrac{c}{a}=2$.

评注：法2是利用几何图形的特征，通过平行及直角三角形的性质，得到$\triangle BOF_2$为正三角形，从而得到渐近线的斜率，进而求出离心率.通过法1与法2的比较，可以发现，一般地，通过数形结合会使得运算简化.

例 2（2019 年高考全国Ⅱ卷 • 理 11）设 F 为双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点，O 为坐标原点，以 OF 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=a^2$ 交于 P,Q 两点，若 $|PQ|=|OF|$，则 C 的离心率为

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.2　　D.$\sqrt{5}$

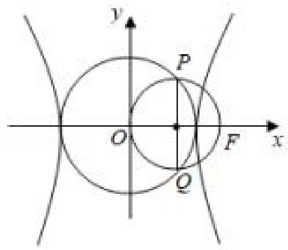

图2

解法 1：如图 2，

由题意，把 $x=\dfrac{c}{2}$ 代入 $x^2+y^2=a^2$，得 $PQ=2\sqrt{a^2-\dfrac{c^2}{4}}$，

再由 $|PQ|=|OF|$，得 $2\sqrt{a^2-\dfrac{c^2}{4}}=c$，即 $2a^2=c^2$，

所以 $\dfrac{c^2}{a^2}=2$，解得 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$.

评注：由题意画出图形，只须先求出 $|PQ|$，再由 $|PQ|=|OF|$ 求出曲线 C 的离心率，其基本思路是利用代数方法，把直线 $x=\dfrac{c}{2}$ 的方程与圆 $x^2+y^2=a^2$ 的方程联立，得到 $|PQ|$，从而把 $|PQ|$、$|OF|$ 用基本量来表示，进而求得离心率.

解法 2：如图 2，依题意，PQ 为以 OF 为直径的圆的一条弦，因为 $|PQ|=|OF|$，所以 PQ 必过以 OF 为直径的圆的圆心，不妨设为 O_1. 在 $RT\triangle OPO_1$ 中，$|OP|=a,|OO_1|=|O_1P|=\dfrac{c}{2}$，则 $a^2=(\dfrac{c}{2})^2+(\dfrac{c}{2})^2$，解得 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$.

评注：利用圆的几何性质，若弦长为直径长，则该弦必过圆心. 从而在 $RT\triangle OPO_1$ 中，可得 $|OP|=a,|OO_1|=|O_1P|=\dfrac{c}{2}$，再利用勾股定理得到基本量的关系，从而求得离心率. 根据圆的几何特征，达到运算简化目的.

例 3（2019 年高考天津卷 • 理 5）已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l，若 l 与双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于点 A 和点 B，且 $|AB|=4|OF|$（O 为原点），则双曲线的离心率为

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.2　　D.$\sqrt{5}$

解法 1：l 的方程为 $x=-1$，双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，

故得 $A(-1,\dfrac{b}{a}),B(-1,-\dfrac{b}{a})$，所以 $|AB|=\dfrac{2b}{a}$，又 $|OF|=1$，所以 $\dfrac{2b}{a}=4$，即 $b=2a$，

所以 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{5}$.

评注：本题考查抛物线、双曲线的性质等基础知识，考查双曲线的离心率的求法. 这是两种曲线组合型的圆锥曲线问题，一般从两曲线的公共点入手（点 A 和点 B），只需把

$\left|AB\right|=4\left|OF\right|$ 用 a,b,c 表示出来，又根据双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$，即可求得离心率.

解法 2：设准线 l 与 x 轴交于点 M，因为 $|AB|=4|OF|$，所以 $2|AM|=4|OM|$，则在 $RT\triangle AMO$ 中，$\tan\angle AOM=\frac{AM}{MO}=\frac{1}{2}=\frac{b}{a}$，所以 $b=2a$，所以 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.

评注:利用双曲线图形的对称性及抛物线的几何性质，得到 $|AM|=2|OM|$，而 $\frac{AM}{MO}$ 的值又是双曲线一条渐近线的斜率，从而得到 $b=2a$，问题获解. 根据双曲线及抛物线的几何特征，把 $\tan\angle AOM$ 的值用基本量来表示，可使得运算简化.