高中数学试卷讲评课的教学策略

蔡海涛
福建省莆田第二中学

本文系福建省教育科学“十三五”规划课题“深度融合信息技术落实高中数学核心素养的实践研究”（课题编号：FJJKXB18-379）及福建省基础教育课程教学研究课题“高中数学主干知识教学落实核心素养的研究——以函数、立几、数列为例”（课题编号：MJYKT2018-056）研究成果之一.

数学讲评课是数学教学中的一种重要课型，在讲评课的教学中，常见的不良现象有：教师没有深入理解概念，不突出通性通法，甚至仅仅罗列解法.学生思维的参与度低，佩服老师的能力，但一节课下来掌握程度不高.这种现象造成学生内化程度降低，从而过分依赖大量练习、题型覆盖，虽有一定学习效果，但投入和收效不成正比，试题一变，学生往往束手无策,导致解题效率低下.**精评缘于细品**

笔者认为，上好讲评课的关键在于“评”字，教师要根据学生答题情况,生成相应的教学对策，从夯实基础、提高能力、提升素养三个角度考虑来“评”.下面笔者就如何上好讲评课，谈谈自己的一些体会，以期抛砖引玉.

1 细品错因,夯实基础

讲评课上,对于学生错误较多的问题，教师要根据学情,善于采取以错制错，以误导悟的方法，用多媒体投影展示典型的错解，让学生暴露自己的思维过程,从而找到数学交流的切入点,激发起学生学习的热情.在师生思维的碰撞中,让学生深刻地理解知识.

例 1　函数 $y=\dfrac{x+5}{x-a}$ 在 $x\in(-1,+\infty)$ 上单调递减，求 a 的取值范围.

师:展示学生的解法

生 1 解法:因为 $y'=\dfrac{-(a+5)}{(x-a)^2}$,则 $y'\le 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立,解得 $a\ge -5$.

生 2 解法:因为 $y'=\dfrac{-(a+5)}{(x-a)^2}$,则 $y'\le 0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立,则 $a\ge -5$ 且 $x-a$ 在 $(-1,+\infty)$ 上不为 0,即 $\begin{cases} a\ge -5 \\ -1-a\ge 0 \end{cases}$,解得 $-5\le a\le -1$.

生 3 解法:同生 2 解法解得 $-5\le a\le -1$,又当 $a=-5$ 时,函数 $y=1(x\ne -1)$,不合题意,舍去.故 a 的取值范围为 $-5<a\le -1$.

师:让学生讨论、辨析以上三种解法,最后总结指出解决函数单调性问题的注意点:1.必须首先考虑函

数的定义域,一定要遵循“定义域先行”的原则，否则就会出现生 1 的错误；2. 函数 $f(x)$ 在 D 上单调递减与 $f'(x)\le 0$ 在 D 上恒成立并非等价,还要考虑常数函数的情况,否则就会出现生 2 的错误. 生 3 的解法是正确的.

接着,教师展示解法四.

解法四(分离常数法):

$$y=\frac{x-a+(a+5)}{x-a}=1+\frac{a+5}{x-a},\text{则有}\begin{cases}a+5>0\\-1-a\ge 0\end{cases},\text{解得}-5<a\le -1.$$

师:让学生辨析解法三和解法四两种不同的解题策略，对两种解法作出总结，归纳出解决已知函数单调性求取值范围问题的方法. 解决这类问题,一般是先考虑函数特征，如果是由简单的初等函数经过变换而得到,则可结合图像处理,否则利用导数工具来求解.

面对错解，教师不是代替学生思考,直接指出错误原因，给出正确答案，而是通过查错、思错、纠错活动，使其充分暴露出错的过程，并在分析讨论中生成正误知识的辨析点. 这样有利于促进学生对已完成的思维过程进行周密且有批判性的思考，对数学本质产生新的顿悟，提升思维监控能力，深刻理解知识本质,夯实了基础,提高了复习效益.

2 细品解法，提高能力

试题讲解前教师充分收集学生的解题思路,或在上课时使学生的想法完全暴露，然后教师引领，师生共同合作完善解题过程，长此以往，不仅可以培养学生思考问题的能力，而且会使学生解完题目后有一种成功的喜悦感，从而对数学产生兴趣.

2.1 一题多解

教师在试卷评讲时，如果每道题都采用常规思路，对学生的求异思维敷衍了事，可能会扼杀学生思维的发散，进而缺失对数学进行探究、进行深层次思考的热情. 教师若能从学生的最近发展区出发，和学生一起分析，寻找有效信息，制定解题策略，多尝试多转化，学生的参与度就会提高，学生才会更容易将所学知识内化，实现知识网络的重新构建，从而使学生研究问题的能力得到提高.

例 2 （2018 年福建省质检卷理科第 16 题）

在平面四边形 $ABCD$ 中， $AB=1$，$AC=\sqrt{5},BD\perp BC,BD=2BC$, 则 AD 的最小值为________.

解法 1：（从角入手）设 $\angle BAC=\theta,\angle ABD=\alpha$, 则 $\angle ABC=\alpha+\dfrac{\pi}{2}$,

在 $\triangle ABC$ 中， $BC^2=6-2\sqrt{5}\cos\theta$, 又 $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$, 得 $BC\cos\alpha=\sqrt{5}\sin\theta$,

在$\triangle ABC$中，$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\alpha$，又$BD=2BC$,

可得$AD^2=25-8\sqrt{5}\cos\theta-4\sqrt{5}\sin\theta=25-20\sin(\theta+\varphi)$, 得$AD_{\min}=\sqrt{5}$.

解法 2:（从边入手）令$BD=2BC=2m$, $\angle ABD=\theta$, 则$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\angle ABC=\theta+\frac{\pi}{2}$,

在$\triangle ABC$中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle ABC$, 又$\cos\angle ABC=-\sin\theta$,

所以$5=m^2+1+2m\sin\theta$, 所以$\sin\theta=\frac{4-m^2}{2m}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{-m^4+12m^2-16}}{2m}$,

则在$\triangle ABD$中，由余弦定理可得$AD^2=4m^2+1-2\sqrt{-m^4+12m-16}$，因为$\triangle ABC$为钝角三角形，得$\sqrt{5}-1<m<2$, 通过令$4m^2+1=x$，可解得$AD_{\min}=\sqrt{5}$.

解法 3:（坐标法）以B为原点，以$\overrightarrow{AB}$为x轴正方向建立平面直角坐标系xOy，

则$A(-1,0)$, $|AC|=\sqrt{5}$, 设$C(\sqrt{5}\cos\alpha-1,\sqrt{5}\sin\alpha)$, $|BC|=r$, 则可设$C(\sqrt{5}\cos\theta,\sqrt{5}\sin\theta)$，

因为$\angle CBD=\frac{\pi}{2}$, 所以$D(2r\cos(\theta+\frac{\pi}{2}),2r\sin(\theta+\frac{\pi}{2}))$,

即$D(-2r\sin\theta,2r\cos\theta)$, 所以$|AD|^2=25-20\sin(\alpha+\varphi)$, 可解得$AD_{\min}=\sqrt{5}$.

解法 4:（解析法）同解法 3，得到$\begin{cases}x_D=-2y_C=-2\sqrt{5}\sin\alpha,\\ y_D=-2x_C=2\sqrt{5}\cos\alpha-2,\end{cases}$

所以D在圆$E:x^2+(y+2)^2=20$上，因为$A(-1,0)$在圆E内，$AE=\sqrt{5}$,

所以当D为射线EA与圆E的交点时，$AD_{\min}=\sqrt{5}$.

解法 5:（几何法）过B作$BE\perp AB$, 且$BE=\frac{1}{2}$, 则$\angle CBE=\angle ABD$, $AE=\frac{\sqrt{5}}{2}$,

则有$\triangle ABD\sim\triangle EBC$, 所以$\frac{AD}{EC}=\frac{AB}{BE}=2$, $AD=2EC\ge 2(AC-AE)=2(\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{2})=\sqrt{5}$.

当且仅当A、E、C三点共线时，等号成立. 得$AD_{\min}=\sqrt{5}$.

讲评题目切不可就题论题，“一解而过”，而要引导学生从不同视角进行深度探究，充分挖掘试题背后隐性的价值和内涵，拓展学生数学思考的视角，提高学生的数学能力[1].

2.2 一题多变

变式是通过对数学问题多角度、多层次的变化，突出问题的本质特征，引导学生从“变”的现象中发

现“不变”的本质，从“不变”的本质中探索“变”的规律.

例3(2012年高考全国Ⅰ卷理科第12题)设点P在曲线$y=\frac{1}{2}e^x$上，点Q在曲线$y=\ln(2x)$上，则$\left|PQ\right|$最小值为（　　）A.$1-\ln 2$　　B.$\sqrt{2}(1-\ln 2)$　　C.$1+\ln 2$　　D.$\sqrt{2}(1+\ln 2)$

教学活动1:分析与解

分析：常规思路是设动点坐标$P(x_1,\frac{1}{2}e^{x_1})$，$Q(x_2,\ln 2x_2)$，列出$\left|PQ\right|=f(x_1,x_2)$，再求最值. 显然双动点难度很大. 注意到指对数函数的关系，发现$y=\frac{1}{2}e^x$与$y=\ln(2x)$互为反函数，图象关于$y=x$对称，则$|PQ|\geq d_1+d_2\geq 2d_0$，其中$d_0$是点$P$到直线$y=x$的距离. 将问题转化为求“曲线$y=\frac{1}{2}e^x$上的点到直线$y=x$的距离的最小值”.

略解：因为$y=\frac{1}{2}e^x$与$y=\ln(2x)$互为反函数，所以这个函数的图象关于$y=x$对称，

$y=\frac{1}{2}e^x$上的点$P(x,\frac{1}{2}e^x)$到直线$y=x$的距离为$d=\frac{\left|\frac{1}{2}e^x-x\right|}{\sqrt{2}}$，设函数$g(x)=\frac{1}{2}e^x-x$可得$g(x)_{\min}=1-\ln 2$，则$d_{\min}=\frac{1-\ln 2}{\sqrt{2}}$，故$\left|PQ\right|$最小值为$2d_{\min}=\sqrt{2}(1-\ln 2)$，选B.

教学活动2:归纳总结

双动点问题力求向单动点问题转化，这是基本思路. 观察并发现两函数的特性，根据它们互为反函数的图像特性，把所求的点点距离转化为点线距离，构造函数求解. 观察、分析、转化，这就是考查能力. 利用图形的对称性将问题转化为解析几何问题，从而形成从数到形的转化，将一类知识迁移到另一类知识情境中创造性解决，这就是创新能力，就是学科素养.

教学活动3:变式拓展

变式1：设点P在曲线$y=e^x$上，点Q在曲线$y=\ln x$上，则$\left|PQ\right|$的最小值为（　　）

A.$e-1$　　B.$\sqrt{2}$　　C.$1+\frac{1}{e}$　　D.2　　答案:B

变式2：设直线$x=t$与函数$f(x)=x^2,g(x)=\ln x$的图象分别交于点M,N则当$\left|MN\right|$达到最小时t

的值为（　　）　A.1　　　B.$\frac{1}{2}$　　　C.$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　D.$\frac{\sqrt{2}}{2}$　答案: D

变式 3：已知函数 $g(x)=a-x^2$（$\frac{1}{e}\le x\le e,e$ 为自然对数的底数）与 $h(x)=2\ln x$ 的图象上存在关于 x 轴对称的点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A.$\left[1,\frac{1}{e^2}+2\right]$　　　B.$\left[1,e^2-2\right]$　　　C.$\left[\frac{1}{e^2}+2,e^2-2\right]$　　　D.$\left[e^2-2,+\infty\right)$　答案: B

变式 4：已知函数 $f(x)=\ln\frac{x}{2}+\frac{1}{2},g(x)=e^{x-2}$,对于 $\forall a\in R$，$\exists b\in\left(0,+\infty\right)$ 使得 $g(a)=f(b)$ 成立，则 $b-a$ 的最小值为（　　）

A.$\ln 2$　　　B.$-\ln 2$　　　C.$2\sqrt{e}-3$　　　D.e^2-3　答案: A

变式 5：若实数 a,b,c,d 满足 $(b+a^2-3\ln a)^2+(c-d+2)^2=0$，则 $(a-c)^2+(b-d)^2$ 的最小值为（　　）

A.$\sqrt{2}$　　　B.8　　　C.$2\sqrt{2}$　　　D.2　答案: B

试题讲评要透视问题的本质，挖掘背景，更多地关注试题的共性、本质. 立足于此, 对试题进行有效变式. 利用变式, 归纳知识点、提炼数学思想方法，总结学习经验, 可以达到“一叶知秋”的效果，也摆脱了“题海战术”. 引导学生思考与试题同类的问题，进行对比，分析其解法，找出解答这一类题的技巧和方法. 解题后要把解题中所联系到的基础知识与各知识有机地“串联”成知识线，“并联”成知识网，有利于提高学生分析问题和解决问题的能力.

3　细品反思, 提升素养

试卷讲评课承担着培养学生问题意识、独立思考、辩证地分析问题、评价和创新等高阶思维能力的任务[2]. 所以, 教师还要去关注如何培养学生思维、提升学生的素养. 笔者认为, 引导学生反思是种有效的手段. 费赖登塔尔教授指出:“反思是数学思维活动的核心和动力.”在引导学生反思数学知识的形成过程的同时, 也要鼓励学生反思数学知识的应用过程. 当前高中数学解题教学中比较流行的做法是“灌输方法，模仿训练”，其实这会导致学生养成生硬套用解题方法的不良习惯，同一种题型的数学问题，稍微改变一下，学生还是做不出来. 学生的解题后反思能力的高低，直接影响到数学解题能力的高低. 因此, 教师应重视加强对学生解题后反思的习惯的培养，真正做到“授之以渔”. 讲评课教学，可以引导学生从以下三个方面进行反思.

3.1 反思错误原因

对于一道错题, 学生的错误是五花八门的. 教师要引导学生反思错误的原因: 审题不当产生的错误、书写不规范产生的错误、阅读理解能力不足产生的错误、数学方法选择不当产生的错误、数学知识方法转化

不当产生的错误、推理不严谨产生的错误、运算求解能力不足产生的错误、数学思想掌握不到位产生的错误、数学概念和公式模糊不清产生的错误、不良考试心理产生的错误等等.学生只有认真反思错误原因,才能真正找到“病根”，然后才好“对症下药”.

3.2 反思思想方法

反思数学思想方法可从两个方面入手，一是反思重要的数学思想方法.例：一个代数问题，可以通过联想与几何问题产生沟通，使用数形结合的方法.如联想斜率、截距、函数图像、方程的曲线等；二是反思重要题型的解题方法.例：数列求和时,常用公式法、错位相减法、裂项相消法以及迭代法、归纳证明法、待定系数法等.还要注意典型方法的适用范围和使用条件,防止形式套用导致错误.解题后引导学生反思题目所体现的数学思想方法，持之以恒，学生自然对这些思想方法能够体会更深，从而提升他们的数学素养.

3.3 反思知识网络

数学知识虽然千头万绪，但只要对知识点进行梳理就可达到层次分明，纲目清楚.譬如：函数内容可分概念、性质、特殊函数三大主线，每条主线又有若干支线，一条支线又可分为若干分线，最后形成网络.在梳理过程中，难免会遇到不慎明了的问题，这时需仔细研读概念，防止概念错误.解题后引导学生反思联系，使学生在记忆的仓储里检索到这些知识，把问题所蕴含的孤立的知识“点”，扩展到系统的知识“面”.通过不断地拓展、联系、加强对知识结构的理解，学生就会形成系统的知识结构.

“题海无边，回头是岸”.学生有做不完的题目，教师有讲不完的试卷.基于核心素养的讲评课教学，教师不仅要加强重点知识、方法的点拨与解题策略剖析，更要从数学素养考查视角研究命题者意图. 在课堂中,以学生为中心,关注学生的思维活动,关注学生的学习体验.只有这样,才会让试卷讲评课变单调为生动，化腐朽为神奇.

参考文献：

[1] 林运来，周玉宝.一题多解拓展视角，弃“量”从“精”提升能力[J].中学数学，2018（11）：83-87.

[2] 王飞,殷长征.核心素养视域下高中数学试卷讲评课[J]中学数学研究,2018(4):1-2.