探析圆锥曲线中面积问题的求解策略

福建省莆田第二中学　　　谢新华

【摘要】直线与圆锥曲线相交，围成的平面图形有很多，常见的有三角形及四边形，此类面积问题的综合条件多、知识点多，解题的主要方法是用代数运算的方法解决几何问题，往往运算量大，学生也比较容易出错．借助几何载体，聚焦代数方法，探索圆锥曲线中的面积问题的求解策略，学会运用数学思想方法解决问题，提高运算效率及思维品质，提升数学核心素养．

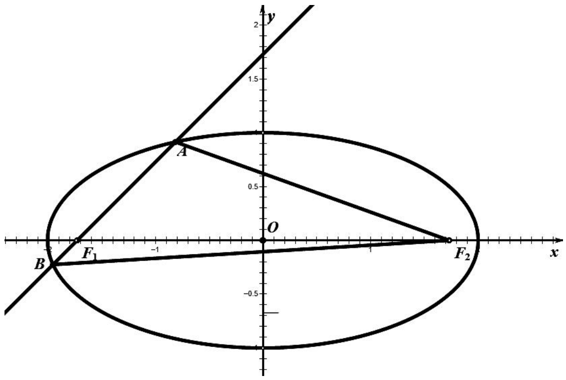
【关键词】 面积；三角形；四边形；最值

1．以圆锥曲线与定直线为载体的三角形面积问题

例：已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，点 $M\left(0,-2\right)$，且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=1$.

（1）求 E 的方程；

（2）过点 F_1 且斜率为 1 的直线与 E 相交于 A,B 两点，求△ABF_2 的面积．



【思考】△ABF_2 面积如何表示？

【思路】面积公式:$S_{\Delta ABF_2}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d$.

以 F_1F_2 为底进行分割:$S_{\Delta ABF_2}=S_{\Delta AF_1F_2}+S_{\Delta BF_1F_2}$.

【解析】(1) $F_1(-c,0),F_2(c,0),\therefore\overrightarrow{MF_1}=-c+2,\overrightarrow{MF_2}=c+2,$

$$\therefore\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=-c^2+4=1,\therefore c=\sqrt{3},\because\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\therefore a=2,b=1,$$

所以 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)$\because F_1(-\sqrt{3},0),F_2(\sqrt{3},0)$,设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$, 直线AB的方程为: $y=x+\sqrt{3}$,

法一：由 $\begin{cases}y=x+\sqrt{3}\\x^2+4y^2=4\end{cases}$ 得 $5x^2+8\sqrt{3}x+8=0$. $\quad\therefore\Delta=32>0,x_1+x_2=-\dfrac{8\sqrt{3}}{5},x_1\cdot x_2=\dfrac{8}{5}$.

$\therefore|AB|=\sqrt{1+1^2}\ |x_1-x_2|=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{32}}{5}=\dfrac{8}{5}$． 又F₂到直线AB的距离为 $d=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$.

$$\therefore S_{\Delta ABF_2}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{4\sqrt{6}}{5}.$$

法二：由 $\begin{cases}y=x+\sqrt{3}\\x^2+4y^2=4\end{cases}$ 得 $y^2-2\sqrt{3}y-1=0.\therefore\Delta=32>0,y_1+y_2=\dfrac{2\sqrt{3}}{5},y_1\cdot y_2=-\dfrac{1}{5}$.

$$\therefore S_{\Delta ABF_2}=S_{\Delta AF_1F_2}+S_{\Delta BF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=\frac{4\sqrt{6}}{5}.$$

【评析】本题是以圆锥曲线与定直线为载体的三角形面积问题，通过本题探究圆锥曲线有关三角形面积问题的求解策略，本题涉及圆锥曲线的标准方程及几何性质、平面向量等基础知识，难度不大，解题入口比较宽，是常考题型．通过分析合几何图形特征，选择恰当的方法表示三角形面积，把$\triangle ABF_2$的面积分割为以F_1F_2为公共边的两个三角形面积之和，从而确定三角形面积的值，回避求弦长等复杂的计算，提高运算的效率.

2．以圆锥曲线与动直线为载体的三角形面积问题

变式 1：【2014 年高考全国 I 理 20 改编】

已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，点$M\left(0,-2\right)$，且$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=1$.

（1）求 E 的方程;

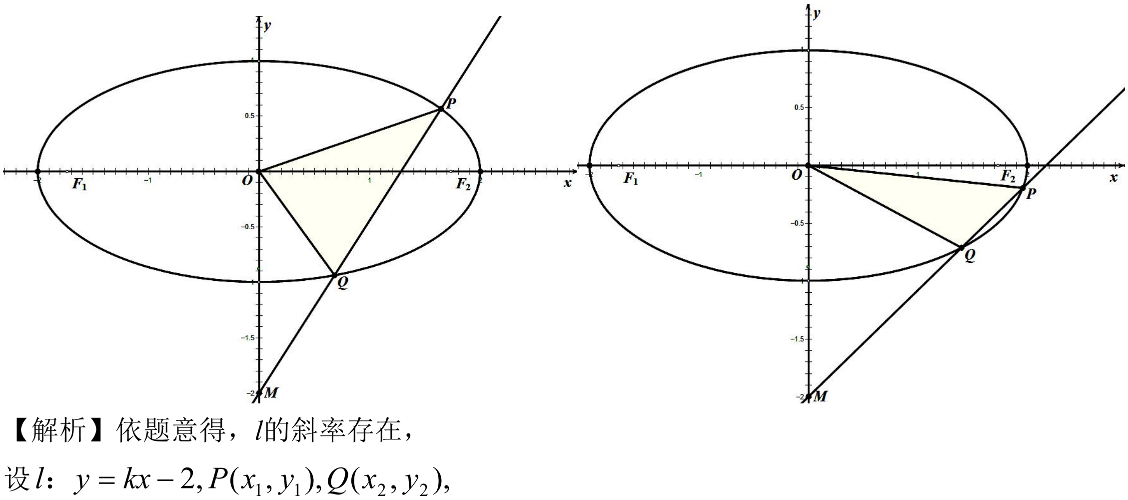
（2）设 O 为坐标原点，过点 M 的动直线 l 与 E 相交于 P，Q 两点，当$\triangle OPQ$面积最大时，求 l 的方程.

【思考】$\triangle OPQ$面积如何表示？如何表示运算比较简便？

【思路】面积公式:$S_{\Delta OPQ}=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot d$.

以 ON 为底进行分割:$S_{\Delta OPQ}=S_{\Delta ONP}+S_{\Delta ONQ}$或$S_{\Delta OPQ}=|S_{\Delta ONP}-S_{\Delta ONQ}|$.

以 OM 为底进行分割:$S_{\Delta OPQ}=|S_{\Delta OMP}-S_{\Delta OMQ}|$.



【解析】依题意得，l的斜率存在，

设l：$y=kx-2,P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}y=kx-2\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$,得$(1+4k^2)x^2-16kx+12=0$,由$\Delta=16(4k^2-3)>0$,得$k^2>\dfrac{3}{4}$,

又$x_1+x_2=\dfrac{16k}{1+4k^2},x_1x_2=\dfrac{12}{1+4k^2}$.

$$S_{\Delta OPQ}=S_{\Delta OMP}-S_{\Delta OMQ}=\frac{1}{2}\left|OM\right|\cdot\left|x_1-x_2\right|=\frac{4\sqrt{4k^2-3}}{1+4k^2}=4\sqrt{\frac{4k^2-3}{(1+4k^2)^2}}.$$

【思考】如何求上式的最大值？

【思路】换元法、二次函数求最值；换元法、基本不等式求最值.

【解析】法一：令 $t=4k^2+1$, 则 $t>4$,

所以 $S_{\Delta OPQ}=4\sqrt{\frac{t-4}{t^2}}=4\sqrt{-4(\frac{1}{t}-\frac{1}{8})^2+\frac{1}{16}}$

当 $t=8$, 即 $k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ 时，$\triangle OPQ$的面积取得最大值1.

此时直线l的方程为 $y=\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$ 或 $y=-\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$.

法二：令 $t=\sqrt{4k^2-3}$, 则 $t>0$,

所以 $S_{\Delta OPQ}=\frac{4t}{t^2+4}=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}\le 1$

当 $t=2$, 即 $k=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$ 时，$\triangle OPQ$的面积取得最大值1.

此时直线l的方程为 $y=\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$ 或 $y=-\frac{\sqrt{7}}{2}x-2$.

【评析】 由例题变式为以圆锥曲线与动直线为载体的三角形面积问题，是 2014 年高考题的改编，通过本题探究圆锥曲线有关三角形面积最值问题的求解策略，本题涉及圆锥曲线的标准方程及几何性质、平面向量、函数、不等式等基础知识，难度中等. 通过分析合几何图形特征，选择恰当的方法表示三角形面积，通过对比几种面积表示法，合理分割表示面积；在求$\triangle OPQ$ 面积的最大值时，运用换元法简化运算，提升学生的思维品质.

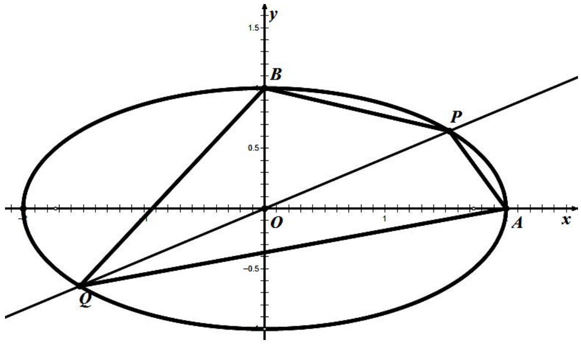
3. 以圆锥曲线与动直线为载体的四边形面积问题

变式 2：【2008 年高考全国II理 21 改编】

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，点 $M\left(0,-2\right)$，且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=1$.

（1）求 E 的方程；

（2）设 $A(2,0),B(0,1)$，直线 $y=kx(k>0)$ 与 E 相交于 P，Q 两点，求四边形 $APBQ$ 面积的最大值.



【思考】四边形 APBQ 可以如何分割？

【思路】 以 PQ 为底进行分割: $S_{四边形APBQ}=S_{\Delta APQ}+S_{\Delta BPQ}$；

以 AB 为底进行分割: $S_{四边形APBQ}=S_{\Delta ABP}+S_{\Delta ABQ}$.

【思考】面积如何表示？选取什么变量来表示？

【解析】法一：设 $P(x_1,y_1)$, 则 $Q(-x_1,-y_1)$, 不妨设 $x_1>0$, 则 $y_1=kx_1>0$,

设 A,B 到直线 PQ 的距离分别为 d_1,d_2,则 $d_1=\dfrac{2k}{\sqrt{1+k^2}},d_2=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$,

由 $\begin{cases} y=kx \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $x=\dfrac{\pm 2}{\sqrt{4k^2+1}}$, 则 $|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot 2x_1=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{4k^2+1}}$,

$$S_{四边形APBQ}=S_{\Delta APQ}+S_{BPQ}=\frac{1}{2}\cdot|PQ|.d_1+\frac{1}{2}\cdot|PQ|.d_2=\frac{2(2k+1)}{\sqrt{4k^2+1}}$$

$$=2\sqrt{\frac{4k^2+1+4k}{4k^2+1}}=2\sqrt{1+\frac{4k}{4k^2+1}}=2\sqrt{1+\frac{4}{4k+\frac{1}{k}}}\le 2\sqrt{2},$$

当 $k=\dfrac{1}{2}$ 时，四边形 $APBQ$ 面积的最大值为 $2\sqrt{2}$.

法二：设 $P(x_1,y_1)$, 则 $Q(-x_1,-y_1)$, 不妨设 $x_1>0$, 则 $y_1=kx_1>0$,

直线 AB 的方程为 $x+2y-2=0$, $|AB|=\sqrt{5}$,

设 P,Q 到直线 AB 的距离分别为 h_1,h_2,则

$$h_1=\frac{|x_1+2y_1-2|}{\sqrt{5}}=\frac{x_1+2y_1-2}{\sqrt{5}},\qquad h_2=\frac{|-x_1-2y_1-2|}{\sqrt{5}}=\frac{x_1+2y_1+2}{\sqrt{5}},$$

所以 $S_{四边形APBQ}=S_{\Delta ABP}+S_{\Delta ABQ}=\dfrac{1}{2}|AB|.(h_1+h_2)=x_1+2y_1$.

又 $\dfrac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2=1$, 即 ${x_1}^2+(2y_1)^2=4$.

所以 $S_{四边形APBQ}=x_1+2y_1=\sqrt{\left(x_1+2y_1\right)^2}=\sqrt{4+2\cdot 2y_1\cdot x_1}\le\sqrt{4+\left(x_1{}^2+(2y_1)^2\right)}=2\sqrt{2}.$

当 $x_1=2y_1$ 时，四边形 $APBQ$ 面积的最大值为 $2\sqrt{2}.$

法三：设 $P(x_1,y_1)$, 则 $Q(-x_1,-y_1)$, 不妨设 $x_1>0$, 则 $y_1=kx_1>0$,

所以 $S_{四边形APBQ}=S_{\Delta APQ}+S_{BPQ}=2S_{\Delta OAP}+2S_{OBP}=|OA|.|y_1|+|OB|.|x_1|=2y_1+x_1.$

令 $x_1=2\cos\theta, y_1=\sin\theta, (\theta\in(0,\frac{\pi}{2}))$

所以 $S_{四边形APBQ}==2\sin\theta+2\cos\theta=2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，四边形 $APBQ$ 面积的最大值为 $2\sqrt{2}.$

【评析】 由例题变式为以圆锥曲线与动直线为载体的四边形面积问题，是 2008 年高考题的改编，涉及圆锥曲线的标准方程及几何性质、平面向量、函数、不等式等基础知识，难度较大，通过本题探究圆锥曲线有关四边形面积最值问题的求解策略. 通过分析合几何图形特征，选择恰当的方法分割四边形，选取合适的变量表示面积，进一步求得面积的最值，提升学生的核心素养.